Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
08. Mai, 2019

Übungsblatt 3

Abgabe: Mittwoch, den 15.05.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Berechnen Sie

$$\int_\gamma |z|^2 dz,$$

wenn

(a) γ eine Parametrisierung des Einheitskreises in $\mathbb{C}$ ist.

(b) γ eine Parametrisierung des Randes von $[0,\pi] \times [0,i] \subseteq \mathbb{C}$ ist.

Aufgabe 2

(a) Für geschlossene stückweise C^1-Kurven $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ mit $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ gilt

$$\int_\gamma \bar{z}\, dz = 2i \int_a^b x(t)\dot{y}(t)\, dt\,.$$

(b) Die Kurve γ umlaufe den Rand eines Parallelogramms $P \subset \mathbb{C}$ entgegen dem Uhrzeigersinn. Zeigen Sie, dass

$$\int_a^b x(t)\dot{y}(t)\, dt$$

genau den Flächeninhalt des Parallelogramms P beschreibt.

Aufgabe 3

Beweisen Sie Proposition 1.20 im Skript:

Es sei $\gamma\colon [a,b] \to \Omega$ eine stückweise C^1-Kurve, $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine stetige Funktion, und $\varphi\colon [c,d] \to [a,b]$ ein stückweiser C^1-Diffeomorphismus. Dann hat $\dot{\varphi}$ konstantes Vorzeichen $\operatorname{sign}\dot{\varphi}$, und es gilt

$$\int_{\gamma\circ\varphi} f(z)\, dz = \operatorname{sign}\dot{\varphi} \int_\gamma f(z)\, dz.$$

Bitte wenden für Aufgabe 4.

Aufgabe 4

Ein Gebiet $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heisst sternförmig, wenn es ein $z_0 \in \Omega$ gibt, so dass für alle $z \in \Omega$ die Verbindungsstrecke $\gamma(t) = (1-t)z_0 + tz$ mit $t \in [0,1]$ in Ω enthalten ist. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Das Schlitzgebiet $\Omega = \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_{\leq 0} = \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Re}(z) \leq 0 \text{ und } \mathrm{Im}(z) = 0\}$ ist sternförmig.

(b) (1 Punkt) Die punktierte Kreisscheibe $B_r^*(z_0) = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < r\}$ ist nicht sternförmig.

(c) (2 Punkte) Jedes sternförmige Gebiet $\Omega \in \mathbb{C}$ ist einfach zusammenhängend.