Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
15. Mai, 2019

Übungsblatt 4

Abgabe: Mittwoch, den 22.05.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie

$$\int_\gamma \frac{1}{z}\,dz,$$

wenn

(a) γ eine Parametrisierung des Randes von $[1,\pi] \times [i/2, i] \subseteq \mathbb{C}$ ist.

(b) γ eine Parametrisierung des Einheitskreises bzw. des Einheitsquadrates $[-1,1] \times [-i,i]$ in $\mathbb{C}$ ist[1].

Aufgabe 2

Es sei γ der Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie

$$(a) \int_\gamma \frac{\cos z}{z}\,dz \quad (b) \int_\gamma \frac{\sin z}{z}\,dz.$$

Aufgabe 3

(a) Zeigen Sie mit Hilfe des Identitätssatzes für holomorphe Funktionen, dass

$$\cos(z+w) = \cos(z)\cos(w) - \sin(z)\sin(w)$$

für alle $z, w \in \mathbb{C}$ gilt.

(b) Bestimmen Sie alle $z \in \mathbb{C}$ mit $\cos(z) = 0$. Sie dürfen Teil (a) verwenden.

Bitte wenden für Aufgabe 4.

[1] Warum reicht eine Rechnung aus?

Aufgabe 4

(a) Sei $n \in \mathbb{Z}$, $f_n(z) = z^n$ und $\Omega_n \subseteq \mathbb{C}$ ein maximales[2] Gebiet auf dem Ω_n holomorph ist. Bestimmen Sie zunächst Ω_n für alle $n \in \mathbb{Z}$.

Bestimmen Sie dann

$$\int_\gamma f_n(z)\ dz,$$

für beliebige geschlossene stückweise C^1-Kurven $\gamma \subset \Omega_n$ und beliebige $n \in \mathbb{Z}$.

(b) Beweisen Sie oder widerlegen Sie folgende Aussage:

Sei $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Falls eine holomorphe Funktion $f \colon \Omega \to \mathbb{C}$ existiert, sodass

$$\int_\gamma f(z)\ dz = 0,$$

für alle geschlossenen Wege $\gamma \subset \Omega$, dann ist Ω einfach zusammenhängend.

[2] Es gibt also kein Gebiet Ω'_n mit $\Omega_n \subsetneq \Omega'_n$ und f_n holomorph auf Ω'_n.