Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
22. Mai, 2019

Übungsblatt 5

Abgabe: Mittwoch, den 29.05.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Für die folgenden Funktionen f und Punkte $z_0 \in \mathbb{C}$ bestimmen Sie die Art der Singularität von f in z_0. Bei hebbaren Singularitäten bestimmen Sie den Grenzwert von f in z_0, und bei Polen geben Sie den Hauptteil an.

$$(a)\ \frac{\sin(z)}{z} \quad \text{in } z_0 = 0, \qquad (b)\ \frac{\cos(z)}{z} \quad \text{in } z_0 = 0,$$
$$(c)\ \frac{z^3 + 3z + 2i}{z^2 + 1} \quad \text{in } z_0 = -i, \qquad (d)\ \frac{1}{1 - e^z} \quad \text{in } z_0 = 0.$$

Aufgabe 2

Es sei $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ die ergänzte komplexe Ebene[1]. Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ sei die Möbiustransformation $M_A \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ wie folgt definiert:

$$M_A(z) = \begin{cases} \frac{az+b}{cz+d} & \text{falls } cz + d \neq 0 \text{ und } z \neq \infty \\ \infty & \text{falls } c = 0 \text{ und } z = \infty \\ \infty & \text{falls } c \neq 0 \text{ und } z = -\frac{d}{c} \\ \frac{a}{c} & \text{falls } c \neq 0 \text{ und } z = \infty. \end{cases}$$

Zeigen Sie:

(a) $M_A \circ M_B = M_{A \cdot B}$ und $M_{E_2} = \mathrm{id}$.

(b) M_A ist bijektiv.

(c) $M_{wA} = M_A$ für alle $w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

(d) Falls A, $B \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$, dann gilt $M_A = M_B$ genau dann, wenn $A = \pm B$.

Bitte wenden für Aufgabe 3 und 4.

[1] Man bezeichnet $\hat{\mathbb{C}}$ auch als die *Riemannsche Zahlenkugel*.

Aufgabe 3

Seien $a < b$ reelle Zahlen.

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine holomorphe Funktion. Zeigen Sie folgende Aussage:

Falls f auf dem Intervall $I = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(z) < b, \mathrm{Im}(z) = 0\}$ nur reelle Werte annimmt, so nimmt f auf ganz $\mathbb{R} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) = 0\}$ nur reelle Werte an.

(b) Seien $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ und $\overline{\mathbb{H}} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) \geq 0\}$. Seien $f, g\colon \overline{\mathbb{H}} \to \mathbb{C}$ stetige Funktionen, die auf $\mathbb{H}$ holomorph sind. Zeigen Sie folgende Aussage:

Falls $f(z) = g(z)$ für alle $z \in I = \{z \in \mathbb{C} \mid a < \mathrm{Re}(z) < b, \mathrm{Im}(z) = 0\}$, dann stimmen f und g auf ganz $\mathbb{H}$ überein.

Aufgabe 4

Es seien $a_1, \ldots, a_n$ Punkte auf dem Einheitskreis in $\mathbb{C}$. Zeigen Sie mit Hilfe des Maximumprinzipes, dass ein z auf dem Einheitskreis existiert, so dass

$$\prod_{j=1}^{n} d(z, a_j) > 1$$

gilt. Hier bezeichnet $d(z, w) = |z - w|$ die Distanz zwischen zwei Punkten z und w bezüglich der Euklidischen Metrik auf $\mathbb{C}$.