Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
29. Mai, 2019

Übungsblatt 6

Abgabe: Mittwoch, den 05.06.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Sei Ω ein Gebiet, $z_0 \in \Omega$, und $f, g \colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$ zwei holomorphe Funktionen. Zeigen Sie die folgenden Aussagen:

(a) $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) \geq \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}$.

(b) Unter welchen Umständen gilt: $\operatorname{ord}_{z_0}(f+g) = \min\{\operatorname{ord}_{z_0}(f), \operatorname{ord}_{z_0}(g)\}$?

(c) Falls $f \neq 0$ und $g \neq 0$ gilt und f, g beide keine wesentliche Singularität in z_0 haben, so gilt
$$\operatorname{ord}_{z_0}(fg) = \operatorname{ord}_{z_0}(f) + \operatorname{ord}_{z_0}(g).$$

(d) Unter welchen Umständen gilt: $\operatorname{ord}_{z_0}\left(\frac{1}{g}\right) = -\operatorname{ord}_{z_0}(g)$?

Aufgabe 2

Es seien $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ paarweise verschieden. Zeigen Sie, dass es genau eine Möbiustransformation $M_A \colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ gibt, so dass
$$M_A(z_1) = 1, \;\; M_A(z_2) = 0, \;\; \text{und } M_A(z_3) = \infty.$$

Zeigen Sie, dass dann
$$M_A(z) = \frac{z - z_2}{z_1 - z_2} \cdot \frac{z_1 - z_3}{z - z_3}$$
gilt.

Bitte wenden für Aufgabe 3 und 4.

Aufgabe 3

Es seien $B_1(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ und $f\colon B_1(0) \to B_1(0)$ holomorph. Zeigen Sie: Falls $z_1, z_2 \in B_1(0)$ mit $z_1 \neq z_2$, $f(z_1) = z_1$, und $f(z_2) = z_2$ existieren, dann gilt $f = \mathrm{id}$.

Hinweis: Betrachten Sie zunächst den Fall $z_1 = 0$. Versuchen Sie dann, den allgemeinen Fall hierauf zurückzuführen.

Aufgabe 4

(a) Für $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ sei $M_A\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ die entsprechende Möbiustransformation. Bestimmen Sie alle $A \in \mathrm{GL}(2, \mathbb{C})$ mit $M_A(\mathbb{H}) = \mathbb{H}$, wobei $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} \mid \mathrm{Im}(z) > 0\}$ die obere Halbebene bezeichne.

(b) Finden Sie eine Möbiustransformation M_C mit $C \in GL(2, \mathbb{C})$, die $B_1(0)$ biholomorph auf $\mathbb{H}$ abbildet. Zeigen Sie dann, dass es zu jeder Möbiustransformation M_A aus (a) eine Matrix $B \in U(1, 1)$ und eine Zahl $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ gibt, so dass $A = \lambda C B C^{-1}$ gilt.