Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
19. Juni, 2019

Übungsblatt 8

Abgabe: Mittwoch, den 26.06.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Es seien a, $b \in \mathbb{C}$ mit $0 < |a| < |b|$. Bestimmen Sie die drei Laurent-Entwicklungen der Funktion $f(z) = \frac{z}{(z-a)(z-b)}$ um den Punkt 0.

Aufgabe 2

Beweisen Sie Proposition 3.21 aus der Vorlesung, also:
Es sei $z_0 \in \Omega$ eine isolierte Singularität einer holomorphen Funktion $f\colon \Omega \setminus \{z_0\} \to \mathbb{C}$.

(a) Wenn f bei z_0 einen Pol der Ordnung $\leq k$ hat, dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!} \frac{\partial^{k-1}}{\partial z^{k-1}} \Big((z - z_0)^k f(z) \Big)\Big|_{z=z_0} .$$

(b) Wenn $f = \frac{g}{h}$, wobei g und h auf Ω holomorph seien und h bei z_0 eine einfache Nullstelle habe, dann gilt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)} .$$

Bitte wenden für Aufgabe 3 und 4.

Aufgabe 3

Es seien $\Omega \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet mit $(0,1) \subset \Omega$ und $f\colon \Omega \to \mathbb{C}$ holomorph, so dass

$$f(x) = \log x \qquad \text{für alle } x \in (0,1).$$

Zeigen Sie:

(a) Auf Ω gilt $\exp(f(z)) = z$.

(b) Seien $r > 0$ und $\varphi \in \mathbb{R}$, sodass $r\exp(i\varphi) \in \Omega$. Sei $g\colon \Omega \to \mathbb{C}$ eine Funktion sodass $\exp(g(z)) = z$. Zeigen Sie, dass

$$g(r\exp(i\varphi)) = \log(r) + i(\varphi + 2k\pi)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$ gilt. Bestimmen Sie k für die Funktion f.

(c) Sei $r > 0$. Zeigen Sie, dass Ω keinen Kreis

$$S_r(0) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = r\}$$

enthalten kann. Insbesondere kann f also nicht auf ganz $\mathbb{C}^*$ definiert werden. Zeigen Sie, dass $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ gewählt werden kann. Für dieses Gebiet Ω wird die Funktion f wird auch als *Hauptzweig des komplexen Logarithmus* bezeichnet und als $\mathrm{Log}(z)$ geschrieben.

(d) Für komplexe Zahlen a, b mit $a \notin \mathbb{R}_{\leq 0}$ kann man a^b als $\exp(b\,\mathrm{Log}(a))$ definieren. Das folgende Beispiel zeigt, dass diese suggestive Schreibweise mit Vorsicht verwendet werden sollte, da die üblichen formalen Rechenregeln mit Potenzen NICHT gelten müssen.

Berechnen Sie $\mathrm{Log}((i(i-1))^i)$ und $\mathrm{Log}((i^i(i-1)^i)$ und vergleichen Sie die Ergebnisse.

Aufgabe 4

Es sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ eine biholomorphe Abbildung. Zeigen Sie:

(a) Die Funktion $z \mapsto f(\frac{1}{z})$ hat einen Pol bei $z = 0$.

(b) Die Funktion $z \mapsto \frac{1}{f(\frac{1}{z})}$ hat eine Nullstelle der Ordnung 1 in $z = 0$.