Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
26. Juni, 2019

Übungsblatt 9

Abgabe: Mittwoch, den 03.07.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1

Bestimmen Sie für folgende Funktionen jeweils das Residuum in allen isolierten Singularitäten $z \in \mathbb{C}$:

$$(a)\ \cot z, \qquad (b)\ \frac{\sin z}{z^n} \text{ für alle } n \geq 1, \qquad (c)\ \frac{1}{\cos^2 z}, \qquad (d)\ \frac{z}{\sin z}.$$

Aufgabe 2

Berechnen Sie:

$$(a)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{1+x^2} dx, \qquad (b)\ \int_0^{2\pi} \frac{\sin x}{2+\cos x} dx.$$

Bitte wenden für Aufgabe 3 und 4.

Aufgabe 3

Die folgenden Integrale lassen sich mit Methoden der Analysis I so umformen, dass man sie mit dem Residuensatz ausrechnen kann:

$$(a)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin(x^2)}{x} dx, \qquad (b)\ \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2} dx.$$

Aufgabe 4

Es sei $f\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ biholomorph, das heißt:

(a) f ist bijektiv;

(b) es gibt ein $p_0 \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, sodass f für alle $p \in (\mathbb{C} \cup \{\infty\}) \setminus \{p_0\}$ holomorph ist;

(c) f hat eine Polstelle in p_0.

(d) Die Umkehrabbildung $f^{-1}\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ von f erfüllt die selben Eigenschaften wie f.

Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Falls $f(\infty) = w \neq \infty$ ist, so wird durch

$$z \mapsto \frac{1}{f(z) - w}$$

eine biholomorphe Funktion $g\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \mapsto \infty$ definiert.

(b) (1 Punkt) Bestimmen Sie alle biholomorphen Funktionen $g\colon \hat{\mathbb{C}} \to \hat{\mathbb{C}}$ mit $\infty \mapsto \infty$. (*Hinweis: Sie dürfen Aufgaben von vergangenen Übungsblättern benutzen.*

(c) (2 Punkte) Die Funktion f ist von der Form $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{SL}(2, \mathbb{C})$.