Prof. Dr. Sebastian Goette
Dr. Martin Kalck
Mathematisches Institut
Universität Freiburg

Funktionentheorie SS 2019
10. Juli, 2019

Übungsblatt 11 – korrigierte Version

Abgabe: Mittwoch, den 17.07.2019
in die Briefkästen der Tutoren.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

Bewertung: Jede Aufgabe wird mit 4 Punkten bewertet. Falls nichts anderes angegeben ist, werden die Punkte gleichmässig auf die Teilaufgaben verteilt.

Aufgabe 1:
Es sei $R(z) = \sum_{n\geq 0} a_n z^n$ eine komplexe Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho > 0$.

(a) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ ein Jordan-Block zum Eigenwert $\lambda \in B_\rho(0)$, das heißt

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \lambda & 1 \\ 0 & & & \lambda \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie A^n für alle $n \in \mathbb{N}$, und benutzen Sie das Ergebnis, um zu zeigen, dass

$$R(A) = \begin{pmatrix} R(\lambda) & \frac{1}{1!}R'(\lambda) & \frac{1}{2!}R''(\lambda) & \cdots \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & \frac{1}{2!}R''(\lambda) \\ & & & \frac{1}{1!}R'(\lambda) \\ 0 & & & R(\lambda) \end{pmatrix}.$$

(b) Es sei $A \in M_n(\mathbb{C})$ beliebig. Zeigen Sie: $R(A)$ konvergiert, wenn $|\lambda| < \rho$ für alle Eigenwerte λ von A gilt, und divergiert, falls mindestens ein Eigenwert betragsmäßig größer als ρ ist.

Aufgabe 2:
Bestimmen Sie für die folgenden Gebiete jeweils eine biholomorphe Abbildung nach $B_1(0)$.

(a) $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$

(b) $S_{t,b} := \{z \in \mathbb{C} | b < \operatorname{Im}(z) < t\}$ mit $t, b \in \mathbb{R}$.

Bitte wenden für Aufgaben 3 und 4.

Aufgabe 3:
Es sei $n > 1$ eine natürliche Zahl und $\Omega = B_{\frac{n}{n+1}}(\frac{i}{n}) \subset \mathbb{C}$. Sei $f\colon \Omega \to B_1(0)$ eine injektive holomorphe Abbildung mit $f(0) = 0$.
Zeigen Sie, dass $|f'(0)| \leq \frac{n^3(n+1)}{n^4-(n+1)^2}$ gilt.

Aufgabe 4:
Sei Ω ein einfach zusammenhängendes Gebiet und seien z_0, $z_1 \in \Omega$. Zeigen Sie:

(a) (1 Punkt) Es gibt eine biholomorphe Abbildung $F\colon \Omega \to \Omega$ mit $F(z_0) = z_1$.

(b) (2 Punkte) Sei F wie in Teil (a). Zeigen Sie: Für alle $w \in S_1(0)$ existiert eine biholomorphe Abbildung $G_w\colon \Omega \to \Omega$ mit $G_w(z_0) = z_1$ und $G'_w(z_0) = wF'(z_0)$. Dabei hängt G_w nur von Ω, w, z_0 und z_1 ab.

(c) (1 Punkt) Sei $H\colon \Omega \to \Omega$ biholomorph mit $H(z_0) = z_1$. Dann gilt $H = G_w$ für ein $w \in S_1(0)$.