Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 1 — 29. April 2003

1. Seien V ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum und $L \in O(V)$ eine orthogonale Selbstabbildung von V. Zeigen Sie

   (a) Ist $M \subseteq V$, so gilt $\big(L(M)\big)^\perp = L(M^\perp)$.

   (b) Ist $U \subseteq V$ ein Untervektorraum und $L(U) = U$, so gilt $L(U^\perp) = U^\perp$.

2. Sei V ein euklidischer Vektorraum und seien $v, w \in V \setminus \{0\}$. Zeigen Sie:

$$\|v + w\| = \|v\| + \|w\| \iff \exists r > 0 \colon v = rw$$

3. Betrachten Sie $C^0\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big) = \big\{f \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{R} \;\big|\; f \text{ ist stetig}\big\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle_{L^2} := \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx\,.$$

   Zeigen Sie: Für die Funktionen $f_k, g_k \in C^0\big([0, 2\pi], \mathbb{R}\big)$, $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, die durch $f_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin kx$, $g_k(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos kx$ gegeben sind, gilt

$$\begin{aligned} \langle f_k, f_k\rangle_{L^2} = \langle g_k, g_k\rangle_{L^2} &= 1 \quad \text{für alle } k \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \\ \langle f_k, f_j\rangle_{L^2} = \langle g_k, g_j\rangle_{L^2} &= 0 \quad \text{für alle } k, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ k \neq j \\ \langle f_k, g_j\rangle_{L^2} &= 0 \quad \text{für alle } k, j \in \mathbb{N} \setminus \{0\} \end{aligned}$$

4. Berechnen Sie den Abstand von $v = (2, -1, 0, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ zu dem 3-dimensionalen Unterraum

$$U := \big\{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \;\big|\; x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5 = 0,\ 2x_1 - x_3 + 2x_4 = 0\big\}$$

Abgabe: Donnerstag, 8. Mai in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`