Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 2 8. Mai 2003

1. Welche der folgenden Matrizen sind orthogonal? Welche liegen in $SO(3)$?

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \sin\varphi & \cos\varphi & 0 \\ -\cos\varphi & \sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ C = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}, \ D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $\ell^2(\mathbb{N})$ ist die Menge aller reellen Zahlenfolgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, für die $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2 < \infty$ gilt. Zeigen Sie:

   (a) Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell^2(\mathbb{N})$, so konvergiert die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ absolut.

   Hinweis: $|a_n b_n| \leq a_n^2 + b_n^2$.

   (b) $\ell^2(\mathbb{N})$ ist ein Untervektorraum des $\mathbb{R}$-Vektorraums aller reellen Zahlenfolgen und

$$\big\langle (a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \big\rangle := \sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$$

   ist ein Skalarprodukt auf $\ell^2(\mathbb{N})$.

3. Sei $\ell^2(\mathbb{N})$ der Vektorraum aus Aufgabe 2 mit dem dort definierten Skalarprodukt.
   Für $i \in \mathbb{N}$ sei $\mathbf{e}^i \in \ell^2(\mathbb{N})$ die Folge, die definiert ist durch

$$(\mathbf{e}^i)_n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

   und $U := \operatorname{span}\{\mathbf{e}^i \mid i \in \mathbb{N}\} \subseteq \ell^2(\mathbb{N})$. Zeigen Sie:

   (a) $\{\mathbf{e}^i \mid i \in \mathbb{N}\}$ ist ein Orthonormalsystem.

   (b) Eine reelle Zahlenfolge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ liegt genau dann in U, wenn es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so dass $a_n = 0$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist $U \subsetneq \ell^2(\mathbb{N})$.

   (c) $U^\perp = \{0\}$. Insbesondere gilt *nicht* $U \oplus U^\perp = \ell^2(\mathbb{N})$.

4. Wir betrachten $\mathbb{R}^{n+1}$ mit dem Standardskalarprodukt. Sei $l \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ eine Linearform auf $\mathbb{R}^n$ und $L\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ definiert durch $L(x) = \big(x, l(x)\big)$.
   Berechnen Sie für $n = 2$ und für $n = 3$ das Volumen des Parallelotops

$$L\big([0,1]^n\big) = P\big((e_1, l(e_1)), \ldots, (e_n, l(e_n))\big) \subseteq \operatorname{im} L \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

   mittels der Zahlen $l_1 := l(e_1), \ldots, l_n := l(e_n)$.

Abgabe: Donnerstag, 15. Mai in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`