Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 3 — 15. Mai 2003

---

1. Sei V ein 2-dimensionaler euklidischer Vektorraum, sei $L \in SO(V)$ und sei $\mathcal{G} = (v_1, v_2)$ eine geordnete ONB von V. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ bezeichne A_φ die Matrix $A_\varphi := \left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{smallmatrix}\right)$. Zeigen Sie:

   (a) Es existiert genau ein $\varphi \in [0, 2\pi)$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = A_\varphi$.

   (b) Ist $\overline{\mathcal{G}}$ eine weitere ONB von V mit der gleichen Orientierung wie $\mathcal{G}$, so gilt $\mathrm{Mat}_{\overline{\mathcal{G}}}^{\overline{\mathcal{G}}}(L) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = A_\varphi$. (Somit ist einem orientierten 2-dimensionalen euklidischen Vektorraum der *Drehwinkel* $\varphi \in [0, 2\pi)$ eines $L \in SO(V)$ definiert.)

   (c) Bezüglich der geordneten ONB $\tilde{\mathcal{G}} := (v_1, -v_2)$ gilt $\mathrm{Mat}_{\tilde{\mathcal{G}}}^{\tilde{\mathcal{G}}}(L) = A_{-\varphi}$.

2. Betrachten Sie den in Aufgabe 2, Blatt 2, definierten Vektorraum $\ell^2(\mathbb{N})$ mit dem dort definierten Skalarprodukt. Die Abbildung $L\colon \ell^2(\mathbb{N}) \to \ell^2(\mathbb{N})$ sei definiert durch $L\big((a_n)_{n\in\mathbb{N}}\big) = (b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_0 := 0$ und $b_{n+1} := a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Zeigen Sie: Die Abbildung L ist orthogonal, aber nicht surjektiv.

3. Sei $A \in K^{n\times n}$ eine Blockmatrix, d. h., es existieren ein $k \in \{1, \dots, n-1\}$ und Matrizen $A_k \in K^{k\times k}$, $A_{n-k} \in K^{(n-k)\times(n-k)}$, so dass $A = \begin{pmatrix} A_k & 0 \\ 0 & A_{n-k} \end{pmatrix}$. Zeigen Sie:

   (a) $\det A = \det A_k \cdot \det A_{n-k}$

   (b) Die Menge der Eigenwerte von A ist die Vereinigung der Mengen der Eigenwerte von A_k und A_{n-k}.

4. *Direkte Summe mit endlich vielen Summanden.* Sind $U_1, \dots, U_k$ Unterräume des Vektorraums V, so heißt V *die direkte Summe der* $U_1, \dots, U_k$ (geschrieben $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$), falls gilt:

   (i) $V = \operatorname{span}\big(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\big)$ und

   (ii) $\forall i \in \{1, \dots, k\}\colon U_i \cap \operatorname{span}\big(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{k} U_j\big) = \{0\}$

   Für $i = 1, \dots, k$ sei B_i eine Basis von U_i. Zeigen Sie:

   (a) V ist direkte Summe von $U_1, \dots, U_k \iff B_i \cap B_j = \emptyset$ für alle i, j mit $i \neq j$ und $B_1 \cup \dots \cup B_k$ ist Basis von V. (Vgl. den Beweis von (3.21)(ii), evtl. Induktion!)

   (b) Ist $V = U_1 \oplus \dots \oplus U_k$, so existieren zu jedem $v \in V$ eindeutig bestimmte $u_1 \in U_1$, $\dots$, $u_k \in U_k$ mit $v = u_1 + \dots + u_k$.

Abgabe: Donnerstag, 22. Mai in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`