Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 22. Mai 2003

1. Für $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist die *Spur* von A definiert durch $\operatorname{spur} A := \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$ (die Summe der Diagonalelemente).

   (a) Zeigen Sie: Für alle $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $\operatorname{spur}(AB) = \operatorname{spur}(BA)$.

   (b) Zeigen Sie: Für alle $A \in \mathbb{R}^{n\times n}, B \in GL(n,\mathbb{R})$ gilt $\operatorname{spur}(B^{-1}AB) = \operatorname{spur} A$. Schließen Sie daraus, dass für $L \in \operatorname{End}(V)$, V ein endlich-dimensionaler Vektorraum, die *Spur* von L durch die Festsetzung $\operatorname{spur} L := \operatorname{spur}\left(\operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)\right)$, wobei $\mathcal{G}$ irgendeine geordnete Basis von V ist, wohldefiniert ist.

   (c) Sei $L \in SO(\mathbb{R}^3)$ eine Drehung um den Winkel $\varphi \in (0,\pi)$ (um eine Drehachse). Zeigen Sie: $\operatorname{spur} L = 1 + 2\cos\varphi$. *Hinweis*: Normalform.

2. Sei $L \in SO(\mathbb{R}^3)$ bezüglich der Standardbasis gegeben durch die Matrix

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

   Bestimmen Sie die Drehachse von L (indem Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 finden) und den Drehwinkel $\varphi \in (0,\pi)$ (bzw. seinen Kosinus, mit Hilfe von Aufgabe 1).

3. Sei $L \in O(V)$ und $\mathcal{G}$ eine geordnete Basis von V, so dass $A := \operatorname{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)$ Normalform hat mit den Drehwinkeln $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ (vgl. (6.24)′). Zeigen Sie:

   (a) Das charakteristische Polynom von L hat die Gestalt

$$P_L(\lambda) = (-1)^n \prod_{j=1}^{k} (\lambda^2 - 2\cos\varphi_j\,\lambda + 1)(\lambda+1)^{\dim U_-}(\lambda-1)^{\dim U_+}$$

   (b) Die komplexen Zahlen $e^{\pm i\varphi_j}$, $j = 1, \ldots, k$, sind Nullstellen von $P_L(\lambda)$.

4. Betrachten Sie den in Anwesenheitsaufgabe 2 definierten Schiefkörper der Quaternionen und verwenden Sie die dort gezeigten Aussagen. Zeigen Sie:

   (a) $S^3 := \{x \in \mathbb{H} \mid \|x\| = 1\}$ mit der Multiplikation ist eine Untergruppe von $(\mathbb{H}\setminus\{0\}, \cdot)$.

   (b) Ist $q \in S^3$, so ist die Abbildung $f_q\colon x \mapsto qx\overline{q}$ orthogonal. *Hinweis*: Wegen $2\langle x,y\rangle = \|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2$ genügt es, zu zeigen $\|f_q(x)\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{H}$.

   (c) f_q bildet den Unterraum $\operatorname{Im}\mathbb{H} = \{0\} \times \mathbb{R}^3$ auf sich ab. (Mit (b) folgt also $F_q := f_q|_{\operatorname{Im}\mathbb{H}} \in O(\operatorname{Im}\mathbb{H})$).

   (d) Sind $p, q \in S^3$, so ist $F_{p\cdot q} = F_p \circ F_q$ und $F_{-q} = F_q$.

Abgabe: **Dienstag**, 3. Juni in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`