Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II"
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 5 — 3. Juni 2003

1. Betrachten Sie den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Orientierung.

   Berechnen Sie das Kreuzprodukt der drei Vektoren $w_1 := (1,2,1,0)$, $w_2 := (0,-1,0,3)$, $w_3 := (1,1,1,0)$ im $\mathbb{R}^4$ und das (3-dimensionale) Volumen des Parallelotops $P(w_1,w_2,w_3)$.

2. Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum, $b \in B(V)$ eine Bilinearform auf V und $\mathcal{G} = (v_1,\ldots,v_n)$ eine geordnete Basis von V.

   (a) Berechnen Sie die Matrizen der Abbildungen $\lambda(b), \rho(b)\colon V \to V^*$ bezüglich der geordneten Basen $\mathcal{G}$ und $\mathcal{G}^*$.

   (b) Die Matrix $(b_{ij})_{1\le i,j\le n} \in K^{n\times n}$ mit $b_{ij} = b(v_i,v_j)$ heißt *die Matrix von b bzgl. $\mathcal{G}$.*
   Zeigen Sie: Die Bilinearform b ist genau dann nicht ausgeartet, wenn die Determinante ihrer Matrix bzgl. $\mathcal{G}$ nicht null ist.

3. *Koordinatentransformation im Vektorraum und seinem Dualraum.* Sei V ein n-dimensionaler K-Vektorraum und seien $\mathcal{G} = (v_1,\ldots,v_n)$ und $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{v}_1,\ldots,\overline{v}_n)$ geordnete Basen von V. Zu $v \in V$ seien $v = \sum_{i=1}^n x_i v_i = \sum_{i=1}^n \overline{x}_i \overline{v}_i$ mit $x_i, \overline{x}_i \in K$ für $1 \le i \le n$ die Darstellungen von v mittels $\mathcal{G}$ bzw. $\overline{\mathcal{G}}$.

   (a) Zeigen Sie: Ist $A = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\overline{\mathcal{G}}}(\mathrm{id}_V)$, d.h., $v_j = \sum_{i=1}^n a_{ij}\overline{v}_i$ für $1 \le j \le n$, so gilt $\overline{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j$ für $1 \le i \le n$.

   (b) Es seien $\mathcal{G}^* = (l_1,\ldots,l_n)$ bzw. $\overline{\mathcal{G}}^* = (\overline{l}_1,\ldots,\overline{l}_n)$ die Dualbasen zu $\mathcal{G}$ bzw. $\overline{\mathcal{G}}$.
   Berechnen Sie $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}^*}^{\overline{\mathcal{G}}^*}(\mathrm{id}_{V^*})$ (in Abhängigkeit von A).

   (c) Zu $l \in V^*$ seien $l = \sum_{i=1}^n y_i l_i = \sum_{i=1}^n \overline{y}_i \overline{l}_i$ mit $y_i, \overline{y}_i \in K$ für $1 \le i \le n$ die Darstellungen von l mittels $\mathcal{G}^*$ bzw. $\overline{\mathcal{G}}^*$.
   Zeigen Sie: Ist $B = (b_{ij})_{1\le i,j\le n} = (A^{-1})^T$, so gilt $\overline{y}_i = \sum_{j=1}^n b_{ij}y_j$ für $1 \le i \le n$.

4. Ist $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ $(a<b)$, dann wird durch das Integral $\lambda_g(f) := \int_a^b f(x)g(x)\,dx$ eine Abbildung $\lambda_g\colon C^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ definiert, die wegen der Rechenregeln für das Integral linear ist, also $\lambda_g \in \big(C^0([a,b],\mathbb{R})\big)^*$.

   (a) Beweisen Sie: Aus $\lambda_g = \lambda_{\tilde g}$ folgt $g = \tilde g$.
   Hinweis: Es reicht den Fall $\tilde g = 0$ zu betrachten (warum?). Wählen Sie dann $f = g$.

   (b) Zu $\alpha \in [a,b]$ betrachtet man das *Dirac-Funktional* $\delta_\alpha\colon C^0([a,b],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, definiert durch $\delta_\alpha(f) := f(\alpha)$.
   Zeigen Sie, dass keine stetige Funktion $g \in C^0([a,b],\mathbb{R})$ existiert, so dass $\delta_\alpha = \lambda_g$.
   Hinweis: Zeigen Sie, dass die Annahme $\delta_\alpha(f) = \lambda_g(f)$ für $f(x) = (x-\alpha)^2 g(x)$ zu einem Widerspruch führt.

Abgabe: Dienstag, 17. Juni in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`