Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 6 — 17. Juni 2003

---

1. Für die Bezeichnungen und Definitionen vgl. Anwesenheitsaufgabe 1.

   Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und H eine Untergruppe von G und sei $\pi \colon G \to G/H$ definiert durch $\pi(g) = gH$. Für $g \in G$ ist $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$.

   Zeigen Sie, dass folgende zwei Aussagen äquivalent sind:

   (i) Für alle $g \in G$ gilt $gHg^{-1} = H$.

   (ii) Es existiert eine Gruppenstruktur auf G/H, so dass $\pi \colon G \to G/H$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

   Untergruppen, die (i) erfüllen, heißen *normale Untergruppen* oder *Normalteiler*.

2. Es seien G_1, G_2 Gruppen und $h \colon G_1 \to G_2$ ein Gruppenhomomorphismus. Zu den Bezeichnungen vgl. Anwesenheitsaufgabe 1 und Aufgabe 1 oben. Zeigen Sie:

   (a) $\ker h = \{g \in G_1 \mid h(g) = e\}$ ist ein Normalteiler von G_1.

   (b) Es existiert genau ein Gruppenhomomorphismus $\overline{h} \colon G_1/\ker h \to G_2$, so dass $\overline{h} \circ \pi = h$. Die Abbildung $\overline{h}$ ist injektiv.

   Eine Gruppe $(G, \cdot)$ heißt *zyklisch*, falls es ein Element $g \in G$ gibt, so dass $G = \{g^n \mid n \in \mathbb{Z}\}$. Zeigen Sie:

   (c) Ist $(G, \cdot)$ eine zyklische Gruppe, so ist G entweder isomorph zu $(\mathbb{Z}, +)$ oder zu $(\mathbb{Z}_p, +)$ für ein $p \in \mathbb{N}_{>0}$.
   Anleitung: Die Abbildung $n \in \mathbb{Z} \mapsto g^n$ ist ein surjektiver Gruppenhomomorphismus von $(\mathbb{Z}, +)$ auf $(G, \cdot)$. Verwenden Sie Teil (b).

3. Sei K ein Körper. Zeigen Sie:

   Der Ring $K^{\mathbb{N}}$ der formalen Potenzreihen ist nullteilerfrei (d. h., aus $f \cdot g = 0$ folgt $f = 0$ oder $g = 0$).

   Hinweis: Betrachten Sie von f und g jeweils die erste von Null verschiedene Stelle.

4. (a) Teilen Sie das Polynom $f_1 := 2x^7 + x^6 - x^4 + 2x^3 - x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ durch $g_1 := x^2 - x + 1 \in \mathbb{R}[x]$ mit Rest (d. h., finden Sie Polynome h_1 und $r_1 \in \mathbb{R}[x]$, so dass $f_1 = g_1 \cdot h_1 + r_1$ mit $\operatorname{grad}(r_1) < \operatorname{grad}(g_1)$).

   (b) Teilen Sie das Polynom $f_2 := x^7 + x^5 + x^3 + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ durch $g_2 := x^3 + x + 1 \in \mathbb{Z}_2[x]$ mit Rest.

Abgabe: Donnerstag, 26. Juni in der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt
Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`