Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 8 — 3. Juli 2003

1. Betrachten Sie die durch $\|v\|_\infty := \max_{1\le i\le n}|v_i|$ definierte Norm $\|\ \|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ und die durch $\|(a_{ij})\| := \max_{1\le i\le n}\sum_{j=1}^n |a_{ij}|$ definiert Norm $\|\ \|$ auf $\mathbb{R}^{n\times n}$. Zeigen Sie:

   (a) Für alle $A\in\mathbb{R}^{n\times n}$ und alle $v\in\mathbb{R}^n$ gilt $\|Av\|_\infty \le \|A\|\,\|v\|_\infty$.

   (b) Für jeden Eigenwert λ von A gilt $|\lambda|\le\|A\|$.

2. Sei $A = \left(\begin{smallmatrix} 0&0&1\\ 1&0&0\\ 0&1&0\end{smallmatrix}\right) \in \mathbb{C}^{3\times 3}$.

   Bestimmen Sie eine Matrix $B\in\mathbb{C}^{3\times3}$ und eine Diagonalmatrix $D\in\mathbb{C}^{3\times3}$, so dass $B^{-1}AB = D$.

3. Sei $\dim V<\infty$ und sei $L\in\operatorname{End}(V)$ diagonalisierbar und seien $\lambda_1,\dots,\lambda_s$ die verschiedenen Eigenwerte von L.

   Zeigen Sie: Ist U ein L-invarianter Untervektorraum, so gilt

   $$U = \bigoplus_{i=1}^{s} \big(U\cap E(\lambda_i)\big)\,.$$

   (Dabei kann $\big(U\cap E(\lambda_i)\big) = \{0\}$ sein für manche i.)

   Anleitung: Zeigen Sie der Reihe nach:

   (a) $E(\lambda_1)\cap U = \ker\big((L-\lambda_1\operatorname{id}_V)|U\big)$

   (b) $\operatorname{im}\big((L-\lambda_1\operatorname{id}_V)|U\big) \subseteq \big(E(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_s)\big)$

   (c) $U = \big(E(\lambda_1)\cap U\big)\oplus\Big(\big(E(\lambda_2)\oplus\cdots\oplus E(\lambda_s)\big)\cap U\Big)$

   und zeigen Sie dann mit Induktion die Behauptung.

4. Sei $L\in\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$. P_L (aufgefasst als Poynom in $\mathbb{C}[x]$) besitze $2k$ (verschiedene) komplexe Nullstellen $\lambda_1,\overline{\lambda}_1,\lambda_2,\overline{\lambda}_2,\dots,\lambda_k,\overline{\lambda}_k$, wobei $\lambda_j = a_j+ib_j$ mit $b_j\neq0$ für $1\le j\le k$, und $n-2k$ (verschiedene) reelle Nullstellen $\lambda_{2k+1},\dots,\lambda_n$.

   Zeigen Sie: Es existiert eine Basis $\mathcal{G} = (x_1,y_1,\dots,x_k,y_k,v_{2k+1},\dots,v_n)$ von $\mathbb{R}^n$, so dass

$$\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L) = \begin{pmatrix} \begin{smallmatrix} a_1 & -b_1\\ b_1 & a_1\end{smallmatrix} & & & & & & \\ & \begin{smallmatrix} a_2 & -b_2\\ b_2 & a_2\end{smallmatrix} & & & & & \\ & & \ddots & & & & \\ & & & \begin{smallmatrix} a_k & -b_k\\ b_k & a_k\end{smallmatrix} & & & \\ & & & & \lambda_{2k+1} & & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Abgabe: Donnerstag, 10. Juli in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`