Übungen zur Vorlesung „Lineare Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 10 17. Juli 2003

1. Seien $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ affine Räume und $A\colon \mathfrak{A}_1 \to \mathfrak{A}_2$ eine affine Abbildung. Zeigen Sie:
   (a) Ist $\mathcal{U}$ ein affiner Unterraum von $\mathfrak{A}_1$, so ist $A(\mathcal{U})$ ein affiner Unterraum von $\mathfrak{A}_2$, und es gilt $\dim f(\mathcal{U}) \leq \dim \mathcal{U}$.
   (b) Sind $\mathcal{U}_1$ und $\mathcal{U}_2$ parallele Unterräume von $\mathfrak{A}_1$, so sind auch $f(\mathcal{U}_1)$ und $f(\mathcal{U}_2)$ parallel.
   (c) *A erhält Teilverhältnisse*: Liegen die Punke $a, b, c \in \mathfrak{A}_1$ auf einer Geraden und gilt $\overrightarrow{ab} = \lambda\, \overrightarrow{bc}$, so gilt $\overrightarrow{A(a)A(b)} = \lambda\, \overrightarrow{A(b)A(c)}$.

2. Betrachten Sie den affinen Raum $\mathbb{R}^3$. Gegeben seien die Punkte $a_0 := (1,2,3)$, $a_1 := (0,1,1)$, $a_2 = (-1,2,1)$, $a_3 := (1,0,2)$ und $b_0 := (4,0,1)$, $b_1 := (-2,-1,0)$, $b_2 := (1,1,1)$, $b_3 := (1,0,-1)$.
   (a) Zeigen Sie, dass (a_0, a_1, a_2, a_3) ein affines Koordinatensystem bildet.
   (b) Sei $A\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ die affine Abbildung, die bestimmt ist durch die Vorschrift $A(a_i) := b_i$ für $i = 0,1,2,3$.

       Bestimmen Sie die Darstellung der Abbildung A bezüglich des Standardkoordinatensystems $(0, e_1, e_2, e_3)$.

3. Sei $D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ und $f\colon D \to \mathbb{R}^2$ definiert durch $f(x,y) := (\frac{1}{x}, \frac{y}{x})$. Zeigen Sie:
   (a) f bildet Geraden auf Geraden ab.
   (b) f ist nicht affin.

4. Sei $\mathfrak{A}$ eine affine Ebene (d.h. ein zweidimensionaler affiner Raum) über $\mathbb{R}$. Für je zwei Punkte a, b bezeichne $\mathcal{G}_{ab}$ die Gerade durch a und b.

   Seien $a, b, c, d \in \mathfrak{A}$ vier Punkte, die nicht auf einer Geraden liegen. Die Geraden $\mathcal{G}_{ab}$ und $\mathcal{G}_{cd}$ seien parallel. Die Geraden $\mathcal{G}_{bc}$ und $\mathcal{G}_{ad}$ mögen sich im Punkt p schneiden, die Geraden $\mathcal{G}_{ac}$ und $\mathcal{G}_{bd}$ im Punkt q. Sei m_1 der Mittelpunkt der Strecke ab und m_2 der Mittelpunkt der Strecke cd.
   (a) Fertigen Sie eine Skizze der Situation an.
   (b) Zeigen Sie: Die Punkte m_1, m_2, p und q liegen auf einer Geraden.

Abgabe: Donnerstag, 24. Mai in der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Internet: `http://web.mathematik.uni-freiburg.de/mi/geometrie/la2/`