Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 3 | 19.–20. Mai 2003

1. Für $\varphi \in \mathbb{R}$ bezeichen $A_\varphi \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ die „Drehmatrix“ $A_\varphi := \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$.

   Zeigen Sie: Die Gleichung $A_\varphi \cdot A_\psi = A_{\varphi+\psi}$ ist äquivalent zu den Additionstheoremen für Sinus und Kosinus.

2. *Direkte Summe mit endlich vielen Summanden.* Sind $U_1, \ldots, U_k$ Unterräume des Vektorraums V, so heißt V *die direkte Summe der* $U_1, \ldots, U_k$ (geschrieben $V = U_1 \oplus \cdots \oplus U_k = \bigoplus_{i=1}^{k} U_i$), falls gilt:

   (i) $V = \operatorname{span}\big(\bigcup_{i=1}^{k} U_i\big)$ und

   (ii) $\forall i \in \{1, \ldots, k\}\colon U_i \cap \operatorname{span}\big(\bigcup_{j=1, j\neq i}^{k} U_j\big) = \{0\}$

   (vgl. Hausaufgaben, Aufgabe 4). Betrachten Sie anstelle der Bedingung (ii) die Bedingung

   (ii)′ Für alle $i, j \in \{1, \ldots, k\}$ mit $i \neq j$ ist $U_i \cap U_j = \{0\}$.

   Ist für $k > 2$ die Bedingung (ii) äquivalent zu (ii)′?

3. Stellen Sie (in Analogie zum Fall $n = 3$, der in der Vorlesung behandelt wurde) eine Liste von allen möglichen Normalformen für orthogonale Abbildungen $L \in O(\mathbb{R}^4)$ auf.