Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 — 26.–27. Mai 2003

1. Seien V, W K-Vektorräume, $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$ und $L^*\colon W^* \to V^*$ wie in der Vorlesung definiert durch
$$\forall l \in W^*, v \in V\colon \big(L^*(l)\big)(v) := l\big(L(v)\big)\,.$$
Zeigen Sie: $L^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$.

2. *Schiefkörper der Quaternionen.* Auf $\mathbb{H} := \mathbb{R}^4$ wird wie folgt eine nicht-kommutative Multiplikation $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$ definiert: Man schreibt $e := e_1, i := e_2, j := e_3, k := e_4$ und setzt: $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathbb{H}$, $i^2 = j^2 = k^2 = -e$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$.

   (a) Zeigen Sie, dass durch diese Festsetzung und die Forderung, dass die Multiplikation bilinear ist (anders ausgedrückt: dass das Distributivgesetz gilt), tatsächlich eine bilineare Abbildung $\mathbb{H} \times \mathbb{H} \to \mathbb{H}$, also ein Produkt auf $\mathbb{H}$ definiert wird.

   (b) Zeigen Sie, dass für diese Multiplikation das Assoziativgesetz gilt.

   Da $e \cdot x = x \cdot e = x$ für alle $x \in \mathbb{H}$, ist e neutrales Element der Multiplikation und wir schreiben im Folgenden 1 statt e.

   (c) Zeigen Sie, dass $rx = (re) \cdot x$ für alle $r \in \mathbb{R}$ und alle $x \in \mathbb{H}$.

   Wir können deshalb $\mathbb{R} \times \{(0,0,0)\} = \mathrm{span}\{e\}$ mit $\mathbb{R}$ identifizieren (ähnlich wie wir das bei den komplexen Zahlen getan haben). Die Elemente von $\mathrm{span}\{e\}$ heißen *reell.* Die Elemente von $\mathrm{Im}\,\mathbb{H} := \{0\} \times \mathbb{R}^3 = \mathrm{span}\{i, j, k\}$ heißen *imaginär.* Für $x = \alpha + b \in \mathbb{H}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathrm{Im}\,\mathbb{H}$ definiert man das *Konjugierte* von x durch $\overline{x} := \alpha - b$. Zeigen Sie:

   (d) $x \in \mathbb{H}$ ist genau dann reell, wenn $\overline{x} = x$ ist. $x \in \mathbb{H}$ ist genau dann imaginär, wenn $\overline{x} = -x$ ist.

   (e) Für alle $x, y \in \mathbb{H}$ gilt $\overline{x \cdot y} = \overline{y} \cdot \overline{x}$. *Hinweis*: Es reicht, dies für die Basiselemente $1, i, j, k$ nachzuweisen (warum?).

   (f) Für alle $x \in \mathbb{H}$ ist $\|x\|^2 = x\overline{x} = \overline{x}x$ ($\|\ \|$ ist die Norm bezüglich des Standardskalarprodukts auf $\mathbb{R}^4$).

   (g) $\|x \cdot y\| = \|x\|\|y\|$ für alle $x, y \in \mathbb{H}$.

   (h) Für alle $x \in \mathbb{H} \setminus \{0\}$ ist $\frac{1}{\|x\|^2}\overline{x}$ multiplikatives Inverses zu x.

   $(\mathbb{H}, +, \cdot)$ erfüllt damit alle Axiome eines Körpers bis auf die Kommutativität der Multiplikation. So eine Gebilde heißt *Schiefkörper.* Die Elemente von $\mathbb{H}$ heißen *Quaternionen.*

   Mehr über Quaternionen und die Darstellung von Elementen von $SO(3)$ durch Quaternionen der Norm 1 (vgl. Hausaufgabe 4) finden Sie in Kapitel 7 *Hamiltonsche Quaternionen* (M. Koecher, R. Remmer) in dem Buch Ebbinghaus et al., *Zahlen*, Springer-Verlag 1988.