Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 4 a — 2.–3. Juni 2003

1. Sei $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$, $V = C^0\big([a, b], \mathbb{R}\big)$ und $l\colon V \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$l(f) := \int_a^b f(t)\, dt$$

   Zeigen Sie: $l \in V^*$.

2. Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $\dim V = n \geq 1$.

   Zwei geordnete Basen $(v_1, \dots, v_n)$ und $(w_1, \dots, w_n)$ heißen *gleichorientiert* $\iff$ Für den Endormorphismus L von V mit $L(v_i) = w_i$ für $1 \leq i \leq n$ gilt $\det L > 0$.

   (a) Sei D eine Determinantenform auf V. Zeigen Sie:

$$(v_1, \dots, v_n) \text{ und } (w_1, \dots, w_n) \text{ sind gleichorientiert } \iff \frac{D(w_1, \dots, w_n)}{D(v_1, \dots, v_n)} > 0$$

   (b) Zeigen Sie: „gleichorientiert“ ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen von V. Es gibt genau 2 Äquivalenzklassen.

3. Sei V ein K-Vektorraum

   (a) Sei $U \subseteq V$ ein Unterraum und $U^s = \{l \in V^* \mid \forall u \in U\colon l(u) = 0\}$. Zeigen Sie:

$$U \subsetneqq V \iff U^s \neq \{0\}$$

   (b) Sei $W \subseteq V^*$ ein Unterraum und $W_s = \{v \in V \mid \forall l \in W\colon l(v) = 0\}$. Zeigen Sie:

$$\text{Aus } W \subsetneqq V^* \text{ folgt nicht } W_s \neq \{0\}.$$

   Anleitung: Nehmen Sie ein V mit $\dim V = \infty$ und eine Basis B von V und setzen Sie

$$W = \{l \in V^* \mid l(b) \neq 0 \text{ nur für endlich viele } b \in B\},$$

   und zeigen Sie: $W \neq V^*$, aber $W_s = \{0\}$.