Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“
im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 5 — 16.–17. Juni 2003

---

1. Sei V ein n-dimensionaler, orientierter, euklidischer Vektorraum. Beweisen Sie, dass für alle $w_1, \ldots, w_{n-1} \in V$ und jede Permutation $\sigma \in \Sigma_{n-1}$ gilt:

$$w_{\sigma(1)} \times \cdots \times w_{\sigma(n-1)} = \operatorname{sgn}(\sigma)\, w_1 \times \cdots \times w_{n-1}$$

2. Sei V der K-Vektorraum aller Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und $a_n = 0$ für alle bis auf endlich viele $n \in \mathbb{N}$.

   Sei W der K-Vektorraum *aller* Folgen $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $b_n \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Die Abbildung $L\colon W \to V^*$ sei definiert durch

$$\big(L((b_n)_{n\in\mathbb{N}})\big)((a_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{i=0}^{\infty} b_i a_i$$

   (beachten Sie, dass die scheinbar unendliche Summe nur endlich viele Summanden $\neq 0$ besitzt).

   Zeigen Sie: L ist ein Isomorphismus.

   (Dies ist ein Hinweis darauf, dass in diesem Fall V^* „größer“ ist als V. Wählt man $K = \mathbb{Q}$, so ist V abzählbar, aber W, und damit V^*, überabzählbar.)