Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 6 — 23.–24. Juni 2003

1. Sei $(G, \cdot)$ eine Gruppe und sei H eine Untergruppe von G (d. h., $e \in H$ und wenn $h_1, h_2 \in H$, so ist auch $h_1 h_2^{-1} \in H$). Zeigen Sie:

   (a) Die Relation $\sim_H$ auf G, die durch

   $$g_1 \sim_H g_2 \iff g_2^{-1} g_1 \in H$$

   definiert ist, ist eine Äquivalenzrelation mit den Äquivalenzklassen

   $$gH = \{gh \mid h \in H\}.$$

   (b) Für jedes $g \in G$ ist die Abbildung von H nach gH, die $h \in H$ auf $gh \in gH$ abbildet, eine Bijektion.

   Bezeichnung: Die *Ordnung* von G ist die Anzahl der Elemente von G. Sie wird mit $|G|$ bezeichnet. Der *Index von H in G*, bezeichnet als $[G : H]$, ist die Anzahl der Äquivalenzklassen von $\sim_H$, d. h. die Anzahl der Elemente der Menge $G/H := \{gH \mid g \in G\}$.

   (c) Zeigen Sie: Ist $|G| < \infty$, so gilt

   $$|G| = [G : H]\, |H|$$

   (Speziell folgt: $|H|$ teilt $|G|$.)

2. Teilen Sie das Polynom $f := x^5 + 3x^4 - x^3 + x^2 - 2 \in \mathbb{Q}[x]$ durch $g := x^2 + 2x - 1 \in \mathbb{Q}[x]$ mit Rest (d. h., finden Sie Polynome h und $r \in \mathbb{Q}[x]$, so dass $f = g \cdot h + r$ mit $\operatorname{grad}(r) < \operatorname{grad}(g)$).