Anwesenheitsaufgaben zur „Linearen Algebra II“ im Sommersemester 2003 bei Prof. V. Bangert

Blatt 7 30. Juni/1. Juli 2003

1. Sei $p \in \mathbb{R}[x] \subseteq \mathbb{C}[x]$ und sei $\lambda \in \mathbb{C}$ eine Nullstelle von p. Zeigen Sie:

   Dann ist auch $\overline{\lambda}$ eine Nullstelle von p.

2. Sei $V(\langle,\rangle)$ ein euklidischer Vektorraum und sei $L \in \operatorname{End}(V)$ selbstadjungiert, d. h., $\forall v, w \in V\colon \langle L(v), w\rangle = \langle v, L(w)\rangle$. Zeigen Sie:

   Sind v und w Eigenvektoren von L zu verschiedenen Eigenwerten, so gilt $\langle v, w\rangle = 0$.

3. Sei $L \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ und $\tilde{L} \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ die $\mathbb{C}$-Fortsetzung von L, d. h.

$$\tilde{L}(x+iy) := L(x) + iL(y) \quad \text{für alle } x, y \in \mathbb{R}^n.$$

   Zeigen Sie:

   (a) $P_L = P_{\tilde{L}}$.
   Hinweis: Matrixdarstellung

   (b) Ist $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von $\tilde{L}$, so auch $\overline{\lambda}$.

   (c) Ist $\lambda = a + ib$ mit $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ein Eigenwert von $\tilde{L}$ und ist $v = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}^n$ ein Eigenvektor zum Eigenwert λ, so gilt

$$L(x) = ax - by\,, \quad L(y) = bx + ay\,,$$

   und x und y sind linear unabhängig.