Klausur „Lineare Algebra II“ SS 2003
Samstag, 26. Juli 2003

mit Lösungsskizzen

Aufgabe 1

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P = (3, 2, 4, 6, 8)$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^5$ von der Geraden $g = \big\{(2, 3, 4, 5, 6) + t(2, 0, -2, 1, 0) \bigm| t \in \mathbb{R}\big\}$.

(3 Punkte)

Schreibe $Q := (2, 3, 4, 5, 6)$ *und* $Q(t) := (2, 3, 4, 5, 6) + t(2, 0, -2, 1, 0)$. *Dann ist* $g = \{Q(t) \mid t \in \mathbb{R}\}$. *Der Abstand von* P *zu* g *ist das Minimum der Abstände von* P *zu* $Q(t)$, $t \in \mathbb{R}$. *Der Abstand von* P *zu* $Q(t)$ *ist* $\|Q(t) - P\| = \|(-1 + 2t, 1, -2t, -1 + t, -2)\|$. *Das Minimum wird angenommen für das* t, *für das der Vektor* $P - Q(t)$ *senkrecht auf dem Richtungsvektor* $(2, 0, -2, 1, 0)$ *der Geraden steht. Das ergibt die Bedingung*

$$\begin{aligned} 0 &= \big\langle(-1 + 2t, 1, -2t, -1 + t, -2), (2, 0, -2, 1, 0)\big\rangle \\ &= -2 + 4t + 4t - 1 + t = 9t - 3\,, \end{aligned}$$

also $t = \frac{1}{3}$. *Für dieses* t *folgt dann*

$$\begin{aligned} d(P, g) &= \|Q(\tfrac{1}{3}) - P\| = \|(-\tfrac{1}{3}, 1, -\tfrac{2}{3}, -\tfrac{2}{3}, -2)\| \\ &= \sqrt{\tfrac{1}{9} + 1 + \tfrac{4}{9} + \tfrac{4}{9} + 4} = \sqrt{6}\,. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

Sei $\big(V, \langle\, ,\rangle\big)$ ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V \geq 2$ und seien $a, b, c \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle$ und $a \neq 0$, so ist $b = c$. (1 Punkt)

Falsch. Gegenbeispiel: $V = \mathbb{R}^2$, $a = b = e_1$, $c = e_1 + e_2$. *Dann ist* $\langle a, b\rangle = 1 = \langle a, c\rangle$ *und* $a \neq 0$, *aber* $b \neq c$.
Bemerkung: $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle$ *gilt immer, wenn* $b - c$ *senkrecht ist zu* a.

b) Ist $\langle a, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$, so ist $a = 0$. (1 Punkt)

Wahr. Beweis: Nach Vorausetzung gilt (setze $x := a$*) insbesondere* $\langle a, a\rangle = 0$. *Aus der Definition des Skalarprodukts (Positiv-Definitheit) folgt* $a = 0$.

Aufgabe 3

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt. $L \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ besitze bezüglich der Standardbasis die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$. Dann ist L eine Drehstreckung (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

Berechnen Sie den Streckfaktor und den Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ von L.

(4 Punkte)

Die Matrix einer Drehstreckung hat die Gestalt $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = r \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix}$*, wobei* r *der Streckfaktor ist und* $\varphi \in [0, \pi]$ *der Drehwinkel. Bilden der Determinante liefert auf der linken Seite den Wert* $a^2 + b^2$*, auf der rechten Seite den Wert* $r^2\big((\cos\varphi)^2 + (\sin\varphi)^2\big) = r^2$*. Daraus folgt für den Streckfaktor:* $r = \sqrt{a^2 + b^2}$*. Division durch* r *liefert dann* $\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$*, also* $\varphi = \arccos \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$*.*

Aufgabe 4

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^5$ mit dem üblichen Skalarprodukt.

Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen des Parallelotops $P(u, v, w)$, das von den Vektoren $u = (1, 2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^5$, $v = (0, -1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ und $w = (1, 0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^5$ aufgespannt wird.

(5 Punkte)

Das Volumen wird mit Hilfe der Gramschen Determinante berechnet:

$$\operatorname{vol}_3\big(P(u, v, w)\big) = \sqrt{\begin{vmatrix} \langle u,u\rangle & \langle u,v\rangle & \langle u,w\rangle \\ \langle v,u\rangle & \langle v,v\rangle & \langle v,w\rangle \\ \langle w,u\rangle & \langle w,v\rangle & \langle w,w\rangle \end{vmatrix}}$$

Man berechnet $\langle u, u\rangle = -7$, $\langle v, v\rangle = -7$, $\langle w, w\rangle = -7$, $\langle u, v\rangle = \langle v, u\rangle = -1$, $\langle u, w\rangle = \langle w, u\rangle = 3$, $\langle v, w\rangle = \langle w, v\rangle = 3$, *und somit* $\operatorname{vol}_3\big(P(u, v, w)\big) = \sqrt{\begin{vmatrix} 7 & -1 & 3 \\ -1 & 7 & 3 \\ 3 & 3 & 7 \end{vmatrix}} = \ldots = \sqrt{192} = 8\sqrt{3}.$

Aufgabe 5

Welche der folgenden Begriffe gehören zur affinen Geometrie, welche gehören zur euklidischen Geometrie?

Schreiben Sie hinter jeden der Begriffe entweder „affin“ oder „euklidisch“, ohne Begründung.

(i) Winkelhalbierende *euklidisch*

(ii) Seitenhalbierende *affin*

(iii) parallele Ebenen *affin*

(iv) Orthogonalität *euklidisch*

(v) Isometrie *euklidisch*

(2 Punkte)

Aufgabe 6
Ist das Polynom $x^3 - 2x + 4$

a) als Polynom über $\mathbb{R}$

b) als Polynom über $\mathbb{Q}$

in Linearfaktoren zerlegbar?
Hinweis: Bestimmen Sie eine (ganzzahlige) Nullstelle durch Raten.

Durch Ausprobieren gefundene Nullstelle: $x_1 = -2$. *Polynomdivision liefert:* $x^3 - 2x + 4 = (x+2)(x^2 - 2x + 2)$. *Das Polynom* $x^2 - 2x + 2$ *hat die Nullstellen* $x_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, *also keine reellen Nullstellen, zerfällt also weder über* $\mathbb{R}$ *noch über* $\mathbb{Q}$ *in Linearfaktoren. Deshalb zerfällt auch das ursprüngliche Polynom* $x^3 - 2x + 4$ *weder über* $\mathbb{R}$ *noch über* $\mathbb{Q}$ *in Linearfaktoren.*

(3 Punkte)

Aufgabe 7
Ist die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar?
Hinweis: Das charakteristische Polynom besitzt eine ganzzahlige Nullstelle.

Nenne die angegebene Matrix A. *Das charakteristische Polynom von* A *ist* $P_A = \det(A - xE_3) = \begin{vmatrix} -1-x & 3 & 2 \\ -1 & 2-x & 0 \\ 1 & -1 & 1-x \end{vmatrix} = \ldots = -x^3 + 2x^2 - 1$. *Ausprobieren liefert die Nullstelle* $\lambda_1 = 1$ *und Polynomdivision liefert dann* $P_A = (x-1)(-x^2 + x + 1) = -(x-1)(x^2 - x - 1)$ *(Alternativ erlaubt geschicktes Ausrechnen der Determinante, den Faktor* $(x-1)$ *auszuklammern und ergibt direkt diese Darstellung). Die Nullstellen des quadratischen Polynoms* $x^2 - x - 1$ *sind* $\lambda_{2,3} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{5}}{2}$.

A *besitzt also 3 verschiedene Eigenwerte und ist deshalb (nach (9.3)) diagonalisierbar.*

(5 Punkte)

Aufgabe 8

Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenräume und die Jordansche Normalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Hinweis: Das charakteristische Polynom besitzt mindestens eine ganzzahlige Nullstelle. (8 Punkte)

Für das charakteristische Polynom berechnet man: $P_A = -x^3 + 3x + 2$. Durch Ausprobieren findet man z.B. die Nullstelle $\lambda_1 = -1$ und durch Polynomdivision $P_A = -(x+1)(x^2 - x - 2)$. Das quadratische Polynom hat die Nullstellen $\lambda_2 = -1$ und $\lambda_3 = 2$.

Also ergibt sich $P_A = (x+1)^2(x-2)$. Die Eigenwerte sind $\lambda_1 = -1$ (mit der Vielfachheit 2) und $\lambda_3 = 2$ (mit der Vielfachheit 1).

Bestimmung der Eigenräume: Man muss jeweils das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 0-\lambda_i & -2 & 2 \\ -3 & -1-\lambda_i & -6 \\ 1 & 1 & 1-\lambda_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0$$

lösen. Für den Eigenwert $\lambda_1 = -1$ erhält man als Lösungsraum $E(-1) = \mathrm{span}\{(-2,0,1)\}$, für $\lambda_3 = 2$ erhält man $E(2) = \mathrm{span}\{(1,-1,0)\}$.

Insbesondere ist der Eigenraum zum doppelten Eigenwert -1 nur eindimensional. Da der Hauptraum $E'(-1)$ aber zweidimensional ist (seine Dimension ist gleich der Vielfachheit des Eigenwerts), ergibt sich für die Jordansche Normalform

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 9

Sei $V := \mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome.

a) Zeigen Sie:

   Sind $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, so gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, das genau $s_1, \dots, s_m$ als Nullstellen besitzt, d. h., $p(s_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \dots m\}$ und $p(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{s_1, \dots, s_m\}$. (3 Punkte)

Setze $p(x) := (x - s_1) \cdot \ldots \cdot (x - s_m)$. Daraus folgt sofort $p(s_i) = 0$. Ist $p(s) = 0$, so muss ein Faktor $s - s_i = 0$ sein, also $s = s_i$.

b) Für $r \in \mathbb{R}$ sei $\delta_r \in V^*$ definiert durch

$$\delta_r(p) = p(r) \quad \text{für alle } p \in V.$$

Zeigen Sie:

Sind $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, so sind die Linearformen $\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_k}$ linear unabhängig. (5 Punkte)

Angenommen $\sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{r_i} = 0$. (D.h., für alle Polynome $p \in V$ gilt $\sum_{i=1}^k \alpha_i \delta_{r_i}(p) = 0$.) Zu zeigen ist: Für alle $j = 1, \ldots, k$ gilt $\alpha_j = 0$. Wähle mit (a) ein Polynom $p \in V$, so dass $p(r_i) = 0$ für $i \neq j$, aber $p(r_j) \neq 0$. Dann gilt

$$0 = \sum_{i=1}^k \alpha_i \, \delta_{r_i}(p) = \sum_{i=1}^k \alpha_i \, p(r_i) = \alpha_j \, p(r_j)$$

Da $p(r_j) \neq 0$, folgt $\alpha_j = 0$.

Daraus folgt, dass $\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_k}$ linear unabhängig sind.