# Klausur „Lineare Algebra II“ SS 2003
## Samstag, 26. Juli 2003

**Aufgabe 1**

Berechnen Sie den Abstand des Punktes $P = (3, 2, 4, 6, 8)$ im euklidischen Raum $\mathbb{R}^5$ von der Geraden $g = \{(2, 3, 4, 5, 6) + t(2, 0, -2, 1, 0) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

(3 Punkte)

**Aufgabe 2**

Sei $(V, \langle\ ,\ \rangle)$ ein euklidischer Vektorraum mit $\dim V \geq 2$ und seien $a, b, c \in V$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist $\langle a, b\rangle = \langle a, c\rangle$ und $a \neq 0$, so ist $b = c$. (1 Punkt)

b) Ist $\langle a, x\rangle = 0$ für alle $x \in V$, so ist $a = 0$. (1 Punkt)

**Aufgabe 3**

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^2$ mit dem üblichen Skalarprodukt. $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^2)$ besitze bezüglich der Standardbasis die Matrix $\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$ mit $a^2 + b^2 \neq 0$. Dann ist $L$ eine Drehstreckung (das brauchen Sie nicht zu beweisen).

Berechnen Sie den Streckfaktor und den Drehwinkel $\varphi \in [0, \pi]$ von $L$.

(4 Punkte)

**Aufgabe 4**

Betrachten Sie den $\mathbb{R}^5$ mit dem üblichen Skalarprodukt.

Berechnen Sie das 3-dimensionale Volumen des Parallelotops $P(u, v, w)$, das von den Vektoren $u = (1, 2, 1, -1, 0) \in \mathbb{R}^5$, $v = (0, -1, 2, 1, 1) \in \mathbb{R}^5$ und $w = (1, 0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^5$ aufgespannt wird. (5 Punkte)

**Aufgabe 5**

Welche der folgenden Begriffe gehören zur affinen Geometrie, welche gehören zur euklidischen Geometrie?

Schreiben Sie hinter jeden der Begriffe entweder „affin“ oder „euklidisch“, ohne Begründung.

(i) Winkelhalbierende

(ii) Seitenhalbierende

(iii) parallele Ebenen

(iv) Orthogonalität

(v) Isometrie

(2 Punkte)

**Aufgabe 6**

Ist das Polynom $x^3 - 2x + 4$

a) als Polynom über $\mathbb{R}$

b) als Polynom über $\mathbb{Q}$

in Linearfaktoren zerlegbar?

*Hinweis*: Bestimmen Sie eine (ganzzahlige) Nullstelle durch Raten.

(3 Punkte)

**Aufgabe 7**

Ist die Matrix $\begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ diagonalisierbar?

*Hinweis*: Das charakteristische Polynom besitzt eine ganzzahlige Nullstelle.

(5 Punkte)

**Aufgabe 8**

Bestimmen Sie die Eigenwerte, Eigenräume und die Jordansche Normalform der Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ -3 & -1 & -6 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

*Hinweis*: Das charakteristische Polynom besitzt mindestens eine ganzzahlige Nullstelle. (8 Punkte)

**Aufgabe 9**

Sei $V := \mathbb{R}[x]$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum der reellen Polynome.

a) Zeigen Sie:

   Sind $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, so gibt es ein Polynom $p \in \mathbb{R}[x]$, das genau $s_1, \ldots, s_m$ als Nullstellen besitzt, d. h., $p(s_i) = 0$ für alle $i \in \{1, \ldots m\}$ und $p(s) \neq 0$ für alle $s \in \mathbb{R} \setminus \{s_1, \ldots, s_m\}$. (3 Punkte)

b) Für $r \in \mathbb{R}$ sei $\delta_r \in V^*$ definiert durch

$$\delta_r(p) = p(r) \quad \text{für alle } p \in V.$$

   Zeigen Sie:

   Sind $r_1, \ldots, r_k \in \mathbb{R}$ verschiedene reelle Zahlen, so sind die Linearformen $\delta_{r_1}, \ldots, \delta_{r_k}$ linear unabhängig. (5 Punkte)