Klausur „Lineare Algebra II“ SS 2003
Wiederholungsklausur
Mittwoch, 8. Oktober 2003

Aufgabe 1
Sei $U \subseteq \mathbb{R}^4$ der Untervektorraum, der die Lösungsmenge des folgenden homogenen linearen Gleichungssystems ist:

$$\begin{aligned} -x_1 \phantom{{}+x_2} + 2x_3 + 2x_4 &= 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 \phantom{{}+2x_4} &= 0 \end{aligned}$$

Berechnen Sie den Abstand (bzgl. des Standardskalarprodukts) des Punktes $p = (3, 1, 1, 5)$ von U. (8 Punkte)

Aufgabe 2
Betrachten Sie im $\mathbb{R}^{10}$ mit dem Standardskalarprodukt den Würfel

$$W = \left\{(x_1, \dots, x_{10}) \in \mathbb{R}^{10} \;\middle|\; \text{Für alle } 1 \leq i \leq 10 \text{ gilt } 0 \leq x_i \leq 2\right\}.$$

Berechnen Sie $\mathrm{vol}_{10}(W)$. (2 Punkte)

Aufgabe 3
Betrachten Sie den $\mathbb{R}^4$ mit dem Standardskalarprodukt. Zeigen Sie:
Es gibt keine orthogonale Abbildung $L\colon \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ für die

$$\begin{aligned} & L(1,0,1,1) = (1,1,1,0) \\ \text{und}\quad & L(1,1,0,0) = (1,0,1,0) \end{aligned}$$

gilt. (2 Punkte)

Aufgabe 4
Sei $L \in SO(\mathbb{R}^3)$ bezüglich der Standardbasis gegeben durch die Matrix

$$\frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -4 & 8 \\ 8 & 4 & 1 \\ -4 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Drehachse von L (indem Sie einen Eigenvektor zum Eigenwert 1 finden) und den Drehwinkel $\varphi \in (0, \pi)$.

(6 Punkte)

Aufgabe 5
Betrachten Sie den $\mathbb{R}^6$ mit dem Standardskalarprodukt.

Berechnen Sie den Flächeninhalt des Parallelogramms $P(u, v) \subseteq \mathbb{R}^6$, das von den Vektoren

$$v = (1, 0, 2, 0, 1, 2) \in \mathbb{R}^6 \quad \text{und} \quad w = (1, 2, 1, 1, 1, 0) \in \mathbb{R}^6$$

aufgespannt wird. (3 Punkte)

Aufgabe 6

Sei $(V, \langle\, , \rangle)$ ein endlich-dimensionaler euklidischer Vektorraum. Ein Endomorphismus $L \in \mathrm{End}(V)$ heißt *volumenerhaltend*, falls für jedes Parallelotop $P \subseteq V$ gilt:

$$\mathrm{vol}\big(L(P)\big) = \mathrm{vol}(P)\,.$$

Welche der folgenden Aussagen sind wahr, welche falsch? (Kurze Begründung oder Gegenbeispiel!)

a) $L \in \mathrm{End}(V)$ volumenerhaltend $\Longrightarrow \det L = 1$

b) $L \in \mathrm{End}(V)$ und $\det L = 1 \Longrightarrow L$ volumenerhaltend

c) $L \in O(V) \Longrightarrow L$ volumenerhaltend

d) $L \in \mathrm{End}(V)$ volumenerhaltend $\Longrightarrow L \in SO(V)$

(4 Punkte)

Aufgabe 7

Bestimmen Sie die Jordansche Normalform der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 1 \\ \vdots & & \ddots & 1 & 1 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(Es wird nicht verlangt, dass Sie eine Basiswechselmatrix angeben.)

(5 Punkte)

Aufgabe 8

Ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 4 & 2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -3 & 5 & 0 \end{pmatrix}$$

diagonalisierbar? (Begründung!)

Hinweis: Das charakteristische Polynom von A besitzt (mindestens) eine ganzzahlige Nullstelle, die Sie erraten können.

(5 Punkte)

Aufgabe 9

Beweisen Sie mittels Vektorrechnung den Satz von Thales (in der euklidischen Ebene): „Jeder Winkel in einem Halbkreis ist ein rechter", vgl. Skizze.

(5 Punkte)