4. Lineare Abbildungen und Matrizen.

Wie überall, so sind auch in der Mathematik nicht nur die einzelnen Objekte wichtig, sondern auch die Beziehungen zwischen ihnen, die hier meist durch Abbildungen beschrieben werden, die (in einem zu definierenden Sinn) die Struktur der Objekte erhalten, sogenannte Homomorphismen. Im folgenden seien V und W Vektorräume über demselben Körper K.

(4.1) Definition. Eine Abbildung $L : V \to W$ heißt linear (oder Vektorraumhomomorphismus), falls für alle $v, v_1, v_2 \in V$ und alle $\alpha \in K$ gilt:

(i)	$L(v_1 + v_2)$	$=$	$L(v_1) + L(v_2)$	(L ist "additiv")
(ii)	$L(\alpha v)$	$=$	$\alpha L(v)$	(L ist "homogen")

Bez.: Statt "lineare Abbildung" ist auch "linearer Operator" üblich. Im Fall $W = K$ spricht man oft von einem "linearen Funktional" oder einer "Linearform" $L : V \to K$.

$$\mathrm{Hom}(V, W) := \{L \mid L : V \to W \text{ linear}\}.$$

Eine lineare Abbildung $L : V \to V$ heißt Endomorphismus, $\mathrm{End}(V) = \{L \mid L : V \to V \text{ linear}\}$.

Ein Homomorphismus $L : V \to W$ heißt Isomorphismus, falls L bijektiv ist. Zwei K-Vektorräume V und W heißen isomorph, falls es einen Isomorphismus $L : V \to W$ gibt.

Beispiele:

0) $\mathrm{id}_V \in \mathrm{End}(V)$.
   Ist $L : V \to W$ die "0-Abbildung" definiert durch
   $$\forall v \in V : Lv = \underline{0} \in W,$$
   so gilt $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Ist $U \subseteq V$ Unterraum, so ist die Inklusion $i : U \to V$, $\forall u \in U$: $i(u) := u$, eine lineare Abbildung.
1) Für $\alpha \in K$ sei $S_\alpha : V \to V$, $S_\alpha(v) := \alpha v$, die "Streckung" um α. Dann gilt: $S_\alpha \in \mathrm{End}(V)$.
2) $V :=$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$. $L \in \mathrm{End}(\mathbb{R}) \Leftrightarrow \exists m \in \mathbb{R}\, \forall x \in \mathbb{R} : L(x) = mx$. Nämlich: $m := L(1)$. Dann gilt: $L(x) = L(x \cdot 1) \overset{\text{(ii)}}{=} x \cdot L(1) = m \cdot x$.
3) Zu reellen Zahlen $a < b$ ist $C^0([a, b], \mathbb{R}) = \{f \mid f : [a, b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, vgl. Bsp. 4 nach (3.1).
   $$L : C^0([a, b], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}, \quad L(f) := \int_a^b f(x)dx$$
   L ist linearer Operator von $C^0([a, b], \mathbb{R})$ nach $\mathbb{R}$ ("Lineares Funktional").
4) $C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist differenzierbar und } f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \text{ ist stetig}\}$
   $D : C^1(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \to C^0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), D(f) := f'$. D ist linearer Operator.
5) Die im Exkurs über Codes definierte Abbildung $F : (\mathbb{Z}_2)^n \to (\mathbb{Z}_2)^p$ ist linear.

Wichtig ist folgender Zusammenhang mit der Analysis: Ganz grob gesprochen ist die Analysis die Kunst, nichtlineare Funktionen (in einer kleinen Umgebung eines festen Punktes x_0) durch lineare Funktionen zu approximieren und aus Eigenschaften der approximierenden linearen Funktion (, mit der man gut explizit rechnen kann) auf Eigenschaften der ursprünglichen nichtlinearen Funktion zu schließen.

Im Fall von (nichtlinearen) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $x_0 \in \mathbb{R}$ ist die approximierende lineare Funktion gegeben durch $h \in \mathbb{R} \to f'(x_0)h \in \mathbb{R}$, und es gilt für den durch $f(x_0+h) = f(x_0) + f'(x_0)h + R(h)$ definierten "Approximationsfehler" $R(h) : \lim\limits_{h \to 0} \frac{R(h)}{h} = 0$. Betrachtet man (z.B. in der Analysis II) Funktionen $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ und $x_0 \in \mathbb{R}^n$, so wird in der analogen Definition der Differenzierbarkeit aus der linearen Funktion $h \in \mathbb{R} \to f'(x_0)h \in \mathbb{R}$ eine lineare Abbildung $Df(x_0) \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m)$.
Noch allgemeiner betrachtet man in der Theorie der Differentialgleichungen (und in der Physik und in anderen Wissenschaften) nichtlineare Differentialoperatoren zwischen unendlich-dimensionalen Funktionenräumen, die durch lineare Operatoren zwischen solchen Funktionenräumen approximiert werden. Oft verwendet man in der Physik direkt diese linearisierten Operatoren (z.B. Wellengleichung, Wärmeleitungsgleichung).

Bez.: Ist $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, so heißt

$$\ker L := \{v \in V \mid L(v) = \underline{0} \in W\} = L^{-1}(\{\underline{0}\})$$

der Kern von L und

$$\mathrm{im}\, L := \{w \in W \mid \exists v \in V : L(v) = w\} = L(V)$$

das Bild von L.

(4.2) Fakt. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, U_1 Unterraum von V, U_2 Unterraum von W. Dann gilt:

(i) $L(U_1)$ ist Unterraum von W.
(ii) $L^{-1}(U_2)$ ist Unterraum von V.

Speziell: $\ker L$ ist Unterraum von V, $\mathrm{im}\, L$ ist Unterraum von W, und es gilt $L(\underline{0}) = \underline{0}$.

Bew.:

(i) Sind $w_1, w_2 \in L(U_1)$, so existieren $v_1, v_2 \in U_1$, so daß $L(v_1) = w_1$ und $L(v_2) = w_2$ gilt. Da U_1 Unterraum ist, gilt $v_1 + v_2 \in U_1$, also $L(v_1 + v_2) \in L(U_1)$. Die Additivität von L impliziert: $w_1 + w_2 = L(v_1) + L(v_2) = L(v_1 + v_2) \in L(U_1)$.
Analog folgt: Ist $w \in L(U_1), \alpha \in K$, so gilt $\alpha w \in L(U_1)$. Schließlich impliziert $U_1 \neq \emptyset$, daß $L(U_1) \neq \emptyset$ gilt.

(ii) Ist $v \in L^{-1}(U_2), \alpha \in K$, so gilt $\alpha L(v) \in U_2$, da U_2 ein Unterraum ist. Die Homogenität von L impliziert: $L(\alpha v) = \alpha L(v) \in U_2$, also $\alpha v \in L^{-1}(U_2)$. Analog folgt: Sind $v_1, v_2 \in L^{-1}(U_2)$, so gilt $v_1 + v_2 \in L^{-1}(U_2)$. Schließlich zeigen wir, daß $L(\underline{0}) = \underline{0}$ gilt. Daraus folgt dann $\underline{0} \in L^{-1}(U_2)$, speziell $L^{-1}(U_2) \neq \emptyset$. $L(\underline{0}) = L(0\underline{0}) = 0L(\underline{0}) = \underline{0}$, vgl. (3.2)(i).

(4.3) Fakt. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Folgende Aussagen sind äquivalent.

(i) L ist injektiv.
(ii) $\ker L = \{\underline{0}\}$.
(iii) Ist $M \subseteq V$ linear unabhängig, so ist $L(M) \subseteq W$ linear unabhängig.

Bew.: (i) $\Rightarrow$ (ii): Ist L injektiv, so ist $\underline{0} \in V$ das einzige Element von V, das durch L auf $\underline{0} \in W$ abgebildet wird, also $\ker L = \{\underline{0}\}$.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): Es gelte $\ker L = \{\underline{0}\}$ und $M \subseteq V$ sei linear unabhängig. Seien $w_1, \dots, w_k$ verschiedene Elemente von $L(M)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_k \in K$, und es gelte $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \underline{0}$. Wir wollen zeigen, daß $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ gilt. Zu jedem $w_i \in L(M)$ existiert ein $v_i \in M$ mit $L(v_i) = w_i$. Da die $w_1, \dots, w_k$ verschieden sind, sind auch die $v_1, \dots, v_k$ verschieden. Durch Induktion folgt aus der Linearität von L, daß

$$L\left(\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i)$$

gilt. Aus $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i) = \sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i w_i = \underline{0}$ folgt also

$$\sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i \in \ker L = \{0\},$$

d.h. $\sum\limits_{i=1}^{k} \alpha_i v_i = \underline{0}$. Da die $v_1, \dots, v_k$ verschiedene Elemente der linear unabhängigen Menge M sind, folgt $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Seien $v_1 \neq v_2 \in V$. Dann gilt $v_2 - v_1 \neq \underline{0}$, d.h. die Menge $M = \{v_2 - v_1\} \subseteq V$ ist linear unabhängig. Nach (iii) ist dann auch $L(M) = \{L(v_2 - v_1)\} \subseteq W$ linear unabhängig, d.h. $L(v_2 - v_1) \neq \underline{0}$. Nun gilt (vgl. (3.2)(iii)):

$$\underline{0} \neq L(v_2 - v_1) = L(v_2 + (-1)v_1) = L(v_2) + L((-1)v_1) = L(v_2) - L(v_1).$$

Also $L(v_1) \neq L(v_2)$, d.h. L ist injektiv.

Bem.: Die linke Seite eines linearen Gleichungssystems I mit k Gleichungen und n Unbekannten definiert wie folgt eine lineare Abbildung $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^k)$:

$$L(x_1, \dots, x_n) := (a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n, \dots, a_{k1}x_1 + \ldots + a_{kn}x_n) \in K^k.$$

Das Problem, für eine gegebene rechte Seite $b = (b_1, \dots, b_k) \in K^k$ von I die Lösungsmenge L_I zu finden, ist also gerade das Problem die Urbildmenge $L^{-1}(\{b\})$ zu finden,

$$L_I = L^{-1}(\{b\}).$$

Es gilt also:
I ist besitzt für die rechte Seite $b = (b_1, \dots, b_k)$ eine Lösung $\Leftrightarrow$ $b \in \mathrm{im}\, L$.

I besitzt für jede rechte Seite höchstens eine Lösung $\Leftrightarrow$ L injektiv $\Leftrightarrow$ $\ker L = \{\underline{0}\}$.
I besitzt für jede rechte Seite genau eine Lösung $\Leftrightarrow$ L Isomorphismus.

(4.4) Lemma. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $M \subseteq V$. Dann gilt:

$$L(\mathrm{span}(M)) = \mathrm{span}\, L(M).$$

Bew.: Übungsaufgabe.

(4.5) Folgerung. Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann sind äquivalent:

(i) L ist Isomorphismus ($\Leftrightarrow$ L bijektiv).
(ii) Für jede Basis B von V gilt: $L|B$ ist injektiv und $L(B)$ ist Basis von W.
(iii) Es existiert eine Basis B von V, so daß $L|B$ injektiv und $L(B)$ Basis von W ist.

Bew.:

(i) $\Rightarrow$ (ii). Sei $B \subseteq V$ Basis $\overset{(4.3)}{\Rightarrow}$ $L(B)$ ist linear unabhängig.
$\mathrm{span}\, L(B) \overset{(4.4)}{=} L(\mathrm{span}\, B) = L(V) \overset{L \text{ surjektiv}}{=} W \Rightarrow L(B)$ ist Erzeugendensystem von W. L injektiv $\Rightarrow$ $L|B$ injektiv.
(ii) $\Rightarrow$ (iii): klar, da nach (3.13) eine Basis von V existiert.
(iii) $\Rightarrow$ (i). Zeige: L ist injektiv. Sei $v \in \ker L$. Dann existiert $k \in \mathbb{N}$ und verschiedene $v_1, \ldots, v_k \in B$ und $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in K$: $v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i v_i$. Daraus folgt

$$(*) \qquad \underline{0} = L(v) = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i L(v_i).$$

Da $L|B$ injektiv ist, sind die $L(v_1), \ldots, L(v_k)$ verschiedene Elemente der Basis $L(B)$. Also folgt aus $(*)$: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_k = 0$ und daraus $v = 0$. Also $\ker L = \{\underline{0}\}$, d.h. L ist injektiv.
$L(V) = L \,\mathrm{span}\, B) \overset{(4.4)}{=} \mathrm{span}\, L(B) = W \Rightarrow L$ ist surjektiv.

Bez.: Eine geordnete Basis $\mathcal{G}$ eines n-dimensionalen Vektorraums V ist ein n-Tupel von Vektoren $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$, so daß $\{v_1, \ldots, v_n\}$ eine Basis von V ist.

(4.6) Satz. *Sei* $\dim V = n < \infty$, $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ *geordnete Basis von* V *und* $w_1, \ldots, w_n$ *beliebige Elemente von* W. *Dann existiert genau ein* $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, *so daß* $Lv_1 = w_1 \ldots, Lv_n = w_n$ *gilt.*

Beweis: Vorbemerkung: Wegen $\mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_n\} = V$ existieren zu jedem $v \in V$ Skalare $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \in K$, so daß $v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$ gilt, und da die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, sind die $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ eindeutig durch v bestimmt, vgl. (3.9).

(i) Eindeutigkeit von L: Es seien L, $L' \in \operatorname{Hom}(V,W)$ und $Lv_i = L'v_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$. Sei $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$. Dann gilt

$$L(v) = L\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L(v_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i L'(v_i) = L'(\sum \alpha_i v_i) = L'(v).$$

(ii) Existenz von L: Für $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i \in V$ definieren wir

$$L(v) := \sum_{i=1}^{n} \alpha_i w_i \in W.$$

Ist $v = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i v_i$, $v' = \sum\limits^{n} \alpha_i' v_i$, so $v + v' = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') v_i$ und damit:
$L(v+v') = \sum\limits_{i=1}^{n} (\alpha_i + \alpha_i') w_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i w_i + \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i' w_i = L(v) + L(v')$, d.h. L ist additiv. Analog folgt, daß L homogen ist, also $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$. Offensichtlich gilt $L(v_i) = w_i$ für alle $i \in \{1,\dots,n\}$.

Bem.: Eine (4.6) entsprechende Aussage gilt auch im Fall $\dim V = \infty$.

(4.7) Folgerung. Seien V, W K-Vektorräume, $\dim V = n < \infty$. Dann gilt:

(i) V ist isomorph zu K^n.
(ii) V ist isomorph zu $W \Leftrightarrow \dim V = \dim W$.

Bew.:

(i) Sei $(v_1,\dots,v_n)$ geordnete Basis von V. Nach (4.6) existiert ein $L \in \operatorname{Hom}(V,K^n)$ mit $L(v_1) = e_1, \dots, L(v_n) = e_n$. Nach (4.5) ist L Isomorphismus.
(ii) Analog folgt aus $\dim V = \dim W$, daß V und W isomorph sind. Ist umgekehrt $L : V \to W$ Isomorphismus, so folgt aus (4.5), daß $\dim V = \dim W$ gilt.

(4.8) Dimensionssatz für lineare Abbildungen. *Ist* $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$ *und* $\dim V < \infty$*, so gilt* $\dim(\ker L) < \infty$*,* $\dim(\operatorname{im} L) < \infty$ *und*

$$\dim V = \dim(\ker L) + \dim(\operatorname{im} L).$$

Speziell folgt: Ist $\dim V = \dim W$*, so gilt:* L *injektiv* $\Leftrightarrow$ L *surjektiv* $\Leftrightarrow$ L *bijektiv.*

Bew.: Aus (3.21) folgt die Existenz eines zu $\ker L$ komplementären Unterraums U von V, d.h. $\ker L \oplus U = V$ und

$$\dim(\ker L) + \dim U = \dim V.$$

Wir zeigen, daß $L|U : U \to \operatorname{im} L$ ein Isomorphismus ist und damit $\dim U = \dim(\operatorname{im} L)$, woraus mit der vorangehenden Gleichung die Behauptung folgt.

$L|U$ ist injektiv, da $\ker(L|U) = \ker L \cap U = \{\underline{0}\}$, vgl. (4.3). Zu jedem $w \in \operatorname{im} L$ existiert ein $v \in V$ mit $L(v) = w$. Wegen $\ker L \oplus U = V$ existieren $v_1 \in \ker L$ und $u \in U$, so daß $v = v_1 + u$ gilt. Dann folgt $w = L(v) = L(v_1) + L(u)$, d.h. $w \in L(U)$. Das zeigt, daß $L|U : U \to \operatorname{im} L$ surjektiv ist.

Anwendung:

Sei I die linke Seite eines linearen Gleichungssystems mit n Unbekannten und k Gleichungen und Koeffizienten $a_{ij} \in K$. Sei $L : K^n \to K^k$ die zugehörige lineare Abbildung, vgl. Bem. nach (4.3). Dann gilt: $L_{I^{\text{hom}}} = \ker L$ und

$$\{b = (b_1, \ldots, b_k) \in K^k \mid \exists \text{ Lösung von } I \text{ mit der rechten Seite } b\} = \operatorname{im} L.$$

Aus (4.8) folgt: $\dim L_{I^{\text{hom}}} = n - \dim(\operatorname{im} L) \geq n - k$. Das wurde schon in (3.25) gezeigt.

$$\begin{aligned} I \text{ ist für beliebige rechte Seiten } (b_1, \ldots, b_k) \text{ lösbar } &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{im} L) = k \\ &\Leftrightarrow \dim(L_{I^{\text{hom}}}) = n - k \end{aligned}$$

d.h. ist $n \geq k$ und ist I für beliebige rechte Seite lösbar, so ist die Lösungsmenge für jede rechte Seite ein $(n-k)$-dimensionaler affiner Unterraum. Ist $k = n$, so gilt: I ist für beliebige rechte Seiten $(b_1, \ldots, b_n)$ lösbar $\Leftrightarrow L_{I^{\text{hom}}} = \{0\} \Leftrightarrow I$ besitzt für jede rechte Seite $(b_1, \ldots, b_n)$ genau eine Lösung.

Ist $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\alpha \in K$, so definieren wir:

$$\alpha L : V \to W \text{ durch: } \forall v \in V \text{ ist } (\alpha L)(v) := \alpha L(v) \in W.$$

Es gilt dann: $\alpha L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, z.B. zeigen wir, daß αL additiv ist: $(\alpha L)(v_1 + v_2) = \alpha L(v_1 + v_2) = \alpha(L(v_1) + L(v_2)) = \alpha L(v_1) + \alpha L(v_2) = (\alpha L)(v_1) + (\alpha L)(v_2)$. Sind $L_1, L_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$, so definieren wir:

$$L_1 + L_2 : V \to W \text{ durch: } \forall v \in V \text{ ist } (L_1 + L_2)(v) := L_1(v) + L_2(v) \in W.$$

Es gilt dann: $L_1 + L_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$, z.B. zeigen wir, daß $L_1 + L_2$ homogen ist: $(L_1 + L_2)(\alpha v) = L_1(\alpha v) + L_2(\alpha v) = \alpha L_1(v) + \alpha L_2(v) = \alpha(L_1(v) + L_2(v)) = \alpha(L_1(v) + L_2(v)) = \alpha(L_1 + L_2)(v)$.

(4.9) Satz. *Mit dieser Addition und dieser Multiplikation mit Körperelementen $\alpha \in K$ ist $\operatorname{Hom}(V, W)$ ein K-Vektorraum.*

Bew.: Es muß nachgeprüft werden, daß $(\operatorname{Hom}(V, W), +)$ eine abelsche Gruppe ist und daß die Bedingungen (3.1)(i)-(iv) erfüllt sind. Das ist ebenso langwierig wie langweilig, aber man sollte es (einmal) getan haben. Wir führen exemplarisch einige der notwendigen Schritte durch: Das neutrale Element der Addition in $\operatorname{Hom}(V, W)$ ist die Abbildung $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, die jedes $v \in V$ auf $\underline{0} \in W$ abbildet, genannt die 0-Abbildung. Das additive Inverse zu $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ist $-L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, definiert durch $(-L)(v) := -L(v)$.

Um (3.1)(iii) zu zeigen, seien $\alpha \in K$, $L_1, L_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Für beliebiges $v \in V$ gilt:

$$\begin{aligned} (\alpha(L_1 + L_2))(v) &= \alpha((L_1 + L_2)(v)) = \alpha(L_1(v) + L_2(v)) = \alpha L_1(v) + \alpha L_2(v) \\ &= (\alpha L_1)(v) + (\alpha L_2)(v) = (\alpha L_1 + \alpha L_2)(v). \end{aligned}$$

Also gilt: $\alpha(L_1 + L_2) = \alpha L_1 + \alpha L_2$.

(4.1) Def. Eine $m \times n$-Matrix A über dem Körper K ist ein rechteckiges Schema, das aus $m \cdot n$ Körperelementen $a_{ij} \in K$ besteht:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{\substack{1 \le i \le m \\ 1 \le j \le n}}$$

A heißt quadratisch $\Leftrightarrow m = n$.

Die Vektoren $(a_{11}, \dots, a_{1n}) \in K^n, \dots, (a_{m1}, \dots, a_{mn}) \in K^n$ heißen die Zeilenvektoren von A. Die $(m \times 1)$-Matrizen $\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}$ heißen die Spaltenvektoren von A.

Mit $K^{m \times n}$ wird die Menge der $(m \times n)$-Matrizen über K bezeichnet.

Bsp.: Die linke Seite eines linearen Gleichungssystems mit m Gleichungen und n Unbekannten (in K) ist durch eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ gegeben.

(4.11) Def. Sei $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$, $\dim V = n$, $\mathcal{G} = (v_1, \dots, v_n)$ geordnete Basis von V, $\dim W = m$, $\mathcal{G}' = (w_1, \dots, w_m)$ geordnete Basis von W. Dann heißt die Matrix $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$, die durch

$$L(v_j) =: \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \qquad \text{für } 1 \le j \le n,$$

definiert ist, die <u>Matrix von</u> L <u>bezüglich</u> $\mathcal{G}$ <u>und</u> $\mathcal{G}'$,

$$A := \operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L).$$

(4.12) Folgerung. Die Abbildung $\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'} : \operatorname{Hom}(V, W) \to K^{m \times n}$ ist bijektiv.

Bew.: Injektivität: Seien $L_1, L_2 \in \operatorname{Hom}(V, W)$ und $\operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L_1) = \operatorname{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L_2)$. Dann gilt: $L_1(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij} w_i = L_2(v_j)$ für $j \in \{1, \dots, n\}$. Aus (4.6) folgt dann: $L_1 = L_2$.

Surjektivität: Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m \times n}$ gegeben. Wir definieren für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$\overline{w}_j := \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \in W.$$

Nach (4.6) existiert (genau) ein $L \in \operatorname{Hom}(V, W) : Lv_j = \overline{w}_j$. Dann gilt: $M_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L) = A$.

Bem.: Da eine Matrix $A \in K^{m \times n}$ im Grunde nur ein etwas anders notiertes Element von $K^{m \cdot n}$ ist, läßt sich leicht eine "natürliche" K-Vektorraumstruktur auf $K^{m \times n}$ definieren:

$\alpha \in K$, $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n} \to \alpha A := (\alpha a_{ij}) \in K^{m\times n}$, d.h.

$$\alpha A := \begin{pmatrix} \alpha a_{11} & \dots & \alpha a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \dots & \alpha a_{mn} \end{pmatrix}$$

$A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m\times n} \to A + B := (a_{ij} + b_{ij}) \in K^{m\times n}$, d.h.

$$A + B := \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & \dots & a_{1n} + b_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} + b_{m1} & \dots & a_{mn} + b_{mn} \end{pmatrix}$$

(4.13) Fakt. Mit diesen Operationen ist $K^{m\times n}$ ein K-Vektorraum der Dimension $m \cdot n$. Die Matrizen $E_{ij} \in K^{m\times n}$, $1 \le i \le m$, $1 \le j \le n$

$$E_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & & 0 & & & \vdots \\ \vdots & & & \vdots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

(wobei die 1 am Schnittpunkt der i'ten Zeile und der j'ten Spalte sitzt) bilden eine Basis, die kanonische Basis, von $K^{m\times n}$.

Bem.: Ist $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$, so gilt $A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij}$.

(4.14) Folgerung. $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'} : \mathrm{Hom}(V, W) \to K^{m\times n}$ ist ein Isomorphismus.

Bew.: (4.12) besagt, daß $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}$ bijektiv ist. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}$ homogen und additiv ist:

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L) = (a_{ij}) \in K^{m\times n} \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \dots, n\} : L(v_j) = \sum a_{ij} w_i.$$

Dann gilt für $j \in \{1, \dots, n\}$:

$$(\alpha L)(v_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha a_{ij} w_i.$$

Also $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(\alpha L) = \alpha(a_{ij}) = \alpha \, \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L)$.

Analog folgt: $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L_1 + L_2) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L_1) + \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L_2)$.

Frage: Gegeben 3 K-Vektorräume V, W, Z mit $\dim V = n$, $\dim W = m$, $\dim Z = k$ und geordneten Basen $\mathcal{G}, \mathcal{G}', \mathcal{G}''$ und $L \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $J \in \mathrm{Hom}(W, Z)$. Wie hängt $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}''}(J \circ L)$ mit $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}'}^{\mathcal{G}''}(J)$ und $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L)$ zusammen?

(4.15) Satz. *Ist* $A = (a_{hl}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}'}^{\mathcal{G}''}(J) \in K^{k \times m}$, $B = (b_{ij}) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L) \in K^{m \times n}$, *so ist* $\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}''}(J \circ L)$ *durch die Matrix* $C = (c_{hj}) \in K^{k \times n}$ *gegeben mit* $c_{hj} = \sum\limits_{i=1}^{m} a_{hi} b_{ij}$ *für* $1 \leq h \leq k$, $1 \leq j \leq n$.

Vorbemerkung: Assoziativ-, Kommutativgesetz von $+$, Distributivgesetz $\Rightarrow$

$$\sum_{i=1}^{m} b_i \left(\sum_{j=1}^{k} a_{ji} v_j \right) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k} b_i a_{ji} v_j \right) = \sum_{j=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} b_i a_{ji} \right) v_j.$$

Bsp.: $b_1(a_{11}v_1 + a_{21}v_2) + b_2(a_{12}v_1 + a_{22}v_2) = (b_1 a_{11} + b_2 a_{12})v_1 + (b_1 a_{21} + b_2 a_{22})v_2$.

Bew. von (4.15): Sei $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\mathcal{G}' = (w_1, \ldots, w_m)$, $\mathcal{G}'' = (z_1, \ldots, z_k)$ und

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i, J(w_i) = \sum_{h=1}^{k} a_{hi} z_h.$$

Dann gilt:
$$\begin{aligned} (J \circ L)(v_j) &= J(L(v_j)) = J\left(\sum_{i=1}^{m} b_{ij} w_i \right) = \sum_{i=1}^{m} b_{ij} J(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{m} b_{ij} \left(\sum_{h=1}^{k} a_{hi} z_h \right) \overset{\text{Vorbem.}}{=} \sum_{h=1}^{k} \left(\sum_{i=1}^{m} a_{hi} b_{ij} \right) z_h. \end{aligned}$$

Definition. Ist $A = (a_{hl}) \in K^{k \times m}$, $B = (b_{ij}) \in K^{m \times n}$, so heißt die Matrix $C = (c_{hj}) \in K^{k \times n}$ mit

$$c_{hj} := \sum_{j=1}^{m} a_{hi} b_{ij} \qquad \text{für } 1 \leq h \leq k, 1 \leq j \leq n$$

das Produkt der Matrizen A und B, $C =: AB$. Dann gilt mit den Bezeichnungen von (4.15):

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}''}(J \circ L) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}'}^{\mathcal{G}''}(J)\, \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}'}(L).$$

Vorsicht: Damit AB definiert ist, muß gelten

$$\#\ \text{Spalten von } A = \#\ \text{Zeilen von } B$$

Explizit:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{2 \times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{3 \times 4}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 8 & 3 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{\in K^{2 \times 4}}$$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}}_{\in K^{2\times 3}} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in K^{3\times 1}} = \underbrace{\begin{pmatrix} 6 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in K^{2\times 1}}$$

(4.16) Folgerung.

(i) Die Matrizenmultiplikation ist assoziativ: $A(BC) = (AB)C$

(ii) $A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$, $(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B$ (Distributivgesetze)

Bew.:

(i) Nachrechnen. Oder: $A = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_4}_{\mathcal{G}_3}(L_3), B = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_3}_{\mathcal{G}_2}(L_2), C = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_2}_{\mathcal{G}_1}(L_1)$ und $(L_3 \circ L_2) \circ L_1 = L_3 \circ (L_2 \circ L_1) \overset{(4.15)}{\Rightarrow}$ Beh.

(ii) Nachrechnen. Oder: $J \circ (L_1 + L_2) = (J \circ L_1) + (J \circ L_2)$ (J linear!) $\overset{(4.14)+(4.15)}{\Rightarrow} A(B_1 + B_2) = AB_1 + AB_2$

(4.17) Abhängigkeit von der Wahl der Basen. Seien $\mathcal{G}, \overline{\mathcal{G}}$ geordnete Basen von V, $\mathcal{G}', \overline{\mathcal{G}}'$ geordnete Basen von V' und $L \in \mathrm{Hom}(V, V')$. Dann gilt:

$$\mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}'}_{\overline{\mathcal{G}}}(L) = \mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}'}_{\mathcal{G}'}(\mathrm{id}_{V'}) \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}'}_{\mathcal{G}}(L) \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\overline{\mathcal{G}}}(\mathrm{id}_V)$$

Bew.: Wende (4.15) auf $L = \mathrm{id}_{V'} \circ L \circ \mathrm{id}_V$ bzgl. der Basen $\overline{\mathcal{G}}, \mathcal{G}, \mathcal{G}', \overline{\mathcal{G}}'$ an.

Bem.: $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$, $\overline{\mathcal{G}} = (\overline{v}_1, \ldots, \overline{v}_n)$. Dann

$$\mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V) = (a_{ij})_{1\le i,j\le n} \Longleftrightarrow v_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\overline{v}_i \qquad \text{für } 1 \le j \le n.$$

1. Spezialfall: $V' = V$

Ein Homomorphismus $L : V \to V$ heißt Endomorphismus, $\mathrm{End}(V) := \mathrm{Hom}(V, V)$. Sei $\dim V = n$. Für jede geordnete Basis $\mathcal{G}$ von V gilt:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V) = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix} =: E_n \in K^{n\times n}$$

E_n heißt die n-dimensionale Einheitsmatrix.

$(\mathrm{End}(V), +, \circ)$ ist Ring (mit 1). Neutrales Element von $\circ$ ist id_V. $(K^{n\times n}, +, \cdot)$ ist Ring (mit 1). Neutrales Element von $\cdot$ ist E_n.

$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}} : \mathrm{End}(V) \to K^{n\times n}$ ist Isomorphismus von Ringen, vgl. (4.14) und (4.15).

Ein bijektiver Endomorphismus heißt Automorphismus, man schreibt $\mathrm{Aut}(V) := \{L \mid L \in \mathrm{End}(V) \text{ bijektiv}\}$. $(\mathrm{Aut}(V), \circ)$ ist Gruppe (Untergruppe von $(S_V, \circ)$, vgl. Bsp. 5) nach (2.1)).

Denn:

(i) $\mathrm{id}_V \in \mathrm{Aut}(V)$ (neutrales Element bezüglich $\circ$)
(ii) $L \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow L^{-1} \in \mathrm{Aut}(V)$ (L^{-1} = Umkehrabbildung von L)
L^{-1} ist bijektiv. Linearität von L^{-1}:

$$\left.\begin{array}{lcl} L(L^{-1}(v+w)) & = & v+w \\ L(L^{-1}(v)+L^{-1}(w)) & = & L(L^{-1}(v))+L(L^{-1}(w)) = v+w \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} L^{-1}(v+w) \\ = L^{-1}(v)+L^{-1}(w) \end{array}$$

ebenso $L^{-1}(\alpha v) = \alpha L^{-1}(v)$
(iii) $L_1, L_2 \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathrm{Aut}(V)$
$(L_1 \circ L_2)(\alpha v) = L_1(L_2(\alpha v)) = L_1(\alpha L_2(v)) = \alpha L_1(L_2(v)) = \alpha((L_1 \circ L_2)(v))$

Analoges Objekt in $K^{n\times n}$:

$$\mathrm{GL}_n(K) := \{A \in K^{n\times n} \mid \exists B \in K^{n\times n} : BA = E_n\}$$

Def.: Seien $(G, \top), (G', \top')$ Gruppen. $H : G \to G'$ heißt Gruppenhomomorphismus $\Leftrightarrow$ $\forall g, h \in G$: $H(g \top h) = H(g) \top' H(h)$
H Gruppenisomorphismus $\Leftrightarrow$ H bijektiver Gruppenhomomorphismus

(4.18) Satz. $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ *ist Gruppe und* $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}} : \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}_n(K)$ *ist Gruppenisomorphismus.*

Bew.:

(i) Zeige: $L \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) \in \mathrm{GL}_n(K)$
$E_n = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L^{-1} \circ L) \overset{(4.15)}{=} \underbrace{\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L^{-1})}_{\in K^{n\times n}} \cdot \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)$
(ii) Zeige: $\forall A \in \mathrm{GL}_n(K) \exists L \in \mathrm{Aut}(V) : \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = A$

$A \in \mathrm{GL}_n(K) \Rightarrow \exists B \in K^{n\times n} : BA = E_n$. Nach (4.14) existieren $J, L \in \mathrm{End}(V)$: $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(J) = B$, $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = A$. Also: $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(J \circ L) = BA = E_n$. Da $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}$ injektiv ist, folgt $J \circ L = \mathrm{id}_V$, speziell L ist injektiv. Nach (4.8) ist L bijektiv, also $L \in \mathrm{Aut}(V)$ und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = A$, außerdem folgt $J \in \mathrm{Aut}(V)$ und damit nach (i) $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(J) = B \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(i)+(ii) $\Rightarrow \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}} : \mathrm{Aut}(V) \to \mathrm{GL}_n(K)$ bijektiv.

(4.15) $\Rightarrow (\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ ist Gruppe und $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}$ Gruppenisomorphismus.

Bez.: Die Elemente von $\mathrm{GL}_n(K)$ heißen reguläre (oder nicht-ausgeartete oder invertierbare) $(n\times n)$-Matrizen. Ist $A \in \mathrm{GL}_n(K)$, $B \in K^{n\times n}$ und $BA = E_n$, so folgt (vgl. Bew. von (4.18))

$B \in \mathrm{GL}_n(K)$ und damit (da $\mathrm{GL}_n(K)$ eine Gruppe ist) $B = A^{-1}$, speziell auch $AB = E_n$. A^{-1} heißt die zu $A \in \mathrm{GL}_n(K)$ inverse Matrix.

(4.19) Folgerung (aus (4.17)): Seien $\mathcal{G}, \overline{\mathcal{G}}$ geordnete Basen von V, $L \in \mathrm{End}(V)$ und $P := \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\overline{\mathcal{G}}}(\mathrm{id}_V)$. Dann gilt $P \in \mathrm{GL}_n(K)$, $P^{-1} = \mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V)$ und

$$\mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\overline{\mathcal{G}}}(L) = P^{-1}\,\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)P$$

Bew.: $\mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V)\,\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\overline{\mathcal{G}}}(\mathrm{id}_V) = \mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\overline{\mathcal{G}}}(\mathrm{id}_V) = E_n \Rightarrow P \in \mathrm{GL}_n(K)$ und $P^{-1} = \mathrm{Mat}^{\overline{\mathcal{G}}}_{\mathcal{G}}(\mathrm{id}_V)$. Die letzte Gleichung folgt aus (4.17).

Bez.: Zwei Matrizen A, $\tilde{A} \in K^{n\times n}$ heißen ähnlich $\Leftrightarrow \exists P \in \mathrm{GL}_n(K) : P^{-1}AP = \tilde{A}$. "Ähnlich" ist eine Äquivalenzrelation. Nichttriviales Problem: Man finde zu gegebenem $A \in K^{n\times n}$ eine "möglichst einfache" ähnliche Matrix (oder äquivalent: Man finde zu $L \in \mathrm{End}(V)$ eine Basis $\mathcal{G}$, so daß $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)$ möglichst einfach ist). Der im allgemeinen nicht erreichbare Idealfall ist:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L) = \text{ Diagonalmatrix } = \begin{pmatrix} d_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & d_n \end{pmatrix}$$

2. Spezialfall: $V = K^n$ mit Basis $\mathcal{G} = (e_1, \ldots, e_n)$
$V' = K^m$ mit Basis $\mathcal{G}' = (e_1, \ldots, e_m)$

Bez.: Im Fall dieser natürlichen Basen schreiben wir für $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}'}_{\mathcal{G}}$ kurz $\mathrm{Mat} : \mathrm{Hom}(K^n, K^m) \to K^{m\times n}$. Wir identifizieren K^n (bzw. K^m) mit den "einspaltigen" Matrizen $K^{n\times 1}$ (bzw. $K^{m\times 1}$) durch den Vektorraumisomorphismus

$$(x_1, \ldots, x_n) \in K^n \to \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}.$$

(4.20) Satz. *Mit diesen Identifikationen gilt: Ist* $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ *und* $A = (a_{ij}) = \mathrm{Mat}(L)$, *so gilt für alle* $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K^n$*:*

$$L(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Bew.: $\mathrm{Mat}(L) = (a_{ij})_{\substack{1\le i\le m \\ 1\le j\le n}} \Leftrightarrow L(e_j) = \sum\limits_{j=1}^{m} a_{ij}e_i$ für $1 \le j \le n$.

$$\text{Also: } L(x) = L\left(\sum_{j=1}^n x_j e_j\right) = \sum_{j=1}^n x_j L(e_j) = \sum_{j=1}^n x_j \left(\sum_{i=1}^m a_{ij} e_i\right) \overset{\text{vgl. Bew. von (4.15)}}{=}$$

$$= \sum_{i=1}^m \left(\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j\right) e_i, \text{ d.h.}$$

$$L(x) = \left(\sum_{j=1}^n a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^n a_{2j}x_j, \ldots, \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j\right) \in K^m. \qquad \text{Andererseits:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^n a_{mj}x_j \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}.$$

Bem.: $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$, $A = \mathrm{Mat}(L)$. Dann "ist" $L(e_j) \in K^m$ der j'te Spaltenvektor von A

$$L(e_j) = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ . \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}.$$

Speziell: Ist $A \in K^{n\times n}$, so gilt: $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow$ die Spaltenvektoren von A sind linear unabhängig.

Begründung: Die lineare Abbildung $L \in \mathrm{End}(K^n)$ mit $\mathrm{Mat}(L) = A$ bildet die Basis $e_1, \ldots, e_n$ auf die n Spaltenvektoren von A ab. Nach (4.5) ist L genau dann ein Automorphismus, wenn diese Spaltenvektoren eine Basis von $K^{n\times 1}$ bilden.

(4.21) Def.: Der Rang $\underline{\mathrm{rg}(A)}$ von $A \in K^{m\times n}$ ist die maximale Zahl linear unabhängiger Spaltenvektoren von A.

Bem.: 1) $0 \leq \mathrm{rg}(A) \leq \min\{n, m\}$. Begründung: Da A n Spaltenvektoren hat, gilt $\mathrm{rg}(A) \leq n$. Da der Raum $K^{m\times 1} \simeq K^m$ der Spaltenvektoren m-dimensional ist, gilt $\mathrm{rg}(A) \leq m$, vgl. (3.16) Austauschsatz von Steinitz.
2) Für $A \in K^{n\times n}$ gilt: $\mathrm{rg}(A) = n \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

(4.22) Fakt: Sei $L \in \mathrm{Hom}(K^n, K^m)$ und $A = \mathrm{Mat}(L)$. Dann gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{rg}(A) &= \dim(\mathrm{span}\{\text{Spaltenvektoren von } A\}) = \dim(\mathrm{im}\, L) \\ &= n - \dim(\ker L) = n - \dim\{x \in K^{n\times 1} \mid Ax = 0\}. \end{aligned}$$

Bew.: Die 1. Gleichung folgt aus der Tatsache, daß die Dimension eines Vektorraums die maximale Anzahl linear unabhängiger Vektoren dieses Vektorraums ist. Die 2. Gleichung, folgt aus “$L(e_j) = j$'ter Spaltenvektor von A” und im $L = \operatorname{span}\{L(e_j) \mid 1 \le j \le n\}$. Die 3. Gleichung folgt aus (4.8) und die 4. Gleichung folgt aus der dritten.

(4.23) Satz. *Für jedes $A \in K^{m\times n}$ ist $\operatorname{rg}(A)$ auch die maximale Zahl linear unabhängiger Zeilenvektoren von A (“Spaltenrang = Zeilenrang”).*

Bew.: Siehe (4.25).

(4.24) Satz. *Sei $A = (a_{ij}) \in K^{m\times n}$ und I das lineare Gleichungssystem*

$$\mathrm{I} \qquad A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

und $(A|b) \in K^{m\times(n+1)}$ die Matrix $\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$

Dann gilt: I besitzt eine Lösung $\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$

Bew.: $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$$x_1\underbrace{\begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}}_{=:A_1} + x_2\underbrace{\begin{pmatrix} a_{12} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}}_{=:A_2} + \ldots + x_n\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix}}_{=:A_n} = \underbrace{\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}}_{=b} \in K^{m\times 1}.$$

Also: I besitzt Lösung $\Leftrightarrow \operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_n\} = \operatorname{span}\{A_1, \ldots, A_n, b\}$
$\Leftrightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|b)$

Konkrete Rechenverfahren:
(4.25) **Lösen eines linearen Gleichungssystems mit dem Gaußschen Algorithmus in Matrizenschreibweise**. (Zum Lösen von linearen Gleichungssystemen siehe auch (1.13), (1.15), (1.16), (3.25), (3.26) und (4.8) plus Anwendung).

Gegeben das lineare Gleichungssystem

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1n}x_n & = b_1 \\ \vdots & & \vdots & \\ a_{m1}x_1 & +\ldots+ & a_{mn}x_n & = b_m. \end{matrix}$$

Setze

$$A_1 := \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}.$$

1. Fall $a_{11} \neq 0$:

$$A_1 \to A_2 := \begin{pmatrix} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & \frac{a_{1n}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & a_{22} - a_{21}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & a_{2n} - a_{21}\frac{a_{1n}}{a_{11}} & b_2 - a_{21}\frac{b_1}{a_{11}} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{m2} - a_{m1}\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & a_{mn} - a_{m1}\frac{a_{1n}}{a_{11}} & b_m - a_{m1}\frac{b_1}{a_{11}} \end{pmatrix}$$

2. Fall: $a_{11} = 0$, aber es existiert $i > 1 : a_{i1} \neq 0$. Vertausche 1. und i'te Zeile von A_1. Dann 1. Fall.

3. Fall: $a_{i1} = 0$ für $1 \leq i \leq m$, d.h.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0\, a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ 0\, a_{m2} & \dots & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times(n+1)}. \qquad \text{Betrachte } \tilde{A}_1 = \begin{pmatrix} a_{12} & \dots & b_1 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m2} & \dots & b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times n}.$$

Dann 1. Fall (für $n-1$).

Iteriere! $\to$ Endergebnis ist eine Matrix $(\overline{A}|\overline{b}) \in K^{m\times(n+1)}$ in Treppenform, z.B.

$$\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & * & \cdot & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & 1 & * & \cdot & \cdot & * \\ 0 & 0 & 0 & 1 & * & \cdot & * \\ \cdot & \cdot & \cdot & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix} \qquad \text{(hier ist } j_1 = 1,\ j_2 = 3,\ j_3 = 4),$$

d.h. es gibt Zahlen $k \leq \min\{m, n\}$ und $1 \leq j_1 < j_2 < \ldots < j_k \leq n$ ($\Rightarrow j_i \geq i$ für $i \in \{1, \ldots, k\}$) mit:

1) $a_{ij_i} = 1$ für $1 \leq i \leq k$ und $a_{ij} = 0$ für $1 \leq i \leq k$ und $j < j_i$.
2) $a_{ij} = 0$ für $i > k$.

Wegen (1.13) gilt für alle $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in K^{n\times 1}$ und alle $b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in K^{m\times 1}$:

$$(I) \qquad Ax = b \Leftrightarrow \overline{A}x = \overline{b} \qquad (\overline{I})$$

Falls $b = 0$, so $\overline{b} = 0$. Deshalb folgt aus (4.22):

$$\mathrm{rg}(A) = n - \dim\{x \mid Ax = 0\} = n - \underbrace{\dim\{x \mid \overline{A}x = 0\}}_{=n-k} = \mathrm{rg}(\overline{A}) = k.$$

$$\text{Andererseits:}\ \ \mathrm{rg}(A) = k \begin{array}{l} = \dim(\mathrm{span}\{\text{Zeilenvektoren von } \overline{A}\}) \\ = \dim(\mathrm{span}\{\text{Zeilenvektoren von } A\}) \end{array}$$

Daraus folgt (4.23).

I besitzt Lösung $\Leftrightarrow$ Für $i > k = \mathrm{rg}(A)$ gilt: $\bar{b}_i = 0$. Dann ist $\overline{I}$ rekursiv auflösbar, beginnend mit der k'ten Zeile, und die Lösungsmenge von I (=Lösungsmenge von $\overline{I}$) ist ein $(n-\mathrm{rg}(A))$-dimensionaler affiner Unterraum von K^n.

(4.26) **Berechnung der inversen Matrix mit dem Gaußschen Algorithmus**. *Gegeben $A \in K^{n\times n}$. Frage: Gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K)$. Wenn ja, berechne A^{-1}.*

Betrachte $(A \mid E_n) = \left(\begin{array}{c|ccc} A & 1 & & 0 \\ & & \ddots & \\ & 0 & & 1 \end{array}\right) \in K^{n\times(2n)}$ und wende (4.25) analog auf $(A \mid E_n)$ an. Man erhält $(\overline{A} \mid \overline{B}) \in K^{n\times(2n)}$, und es gilt $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow \overline{A} \in \mathrm{GL}_n(K) \Leftrightarrow \overline{a}_{ii} = 1$ für $1 \leq i \leq n$. Ausserdem gilt $\overline{a}_{ij} = 0$ für $i > j \dots$ (d.h. $\overline{A} = \begin{pmatrix} 1 & * & \dots & * \\ 0 & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & * \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$). Durch geeignete Additionen der letzten, der vorletzten, ..., der 2. Zeile verwandelt man $(\overline{A} \mid \overline{B})$ in $(\mathrm{En} \mid \overline{\overline{B}})$, und es gilt für $j \in \{1, \dots, n\}$ und alle $x \in K^{n\times 1}$:

$$Ax = e_j \Leftrightarrow \mathrm{En}\, x (= x) = j\text{'te Zeile von } \overline{\overline{B}} = \overline{\overline{B}} e_j.$$

Also: $A\overline{\overline{B}}e_j = Ax = e_j$ für $j \in \{1, \dots, n\}$ und damit $A\overline{\overline{B}} = \mathrm{En}$. Also gilt:

$$\overline{\overline{B}} \text{ ist zu } A \text{ inverse Matrix.}$$

Zwei explizite Beispiele zu den Rechenverfahren.

Zu (4.25):

$$\mathrm{I} \qquad \begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & x_2 & - & x_3 & - & x_4 & = & -2 \\ 3x_1 & + & 3x2 & - & x_3 & - & 2x_4 & = & 6 \\ -x_1 & - & x_2 & + & 3x_3 & + & 2x_4 & = & 14 \end{array}$$

$$(A|b) = \left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & -1 & -2 & 6 \\ -1 & -1 & 3 & 2 & 14 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} -3 \\ \leftarrow \\ \end{array} \qquad \begin{array}{r} + \\ \\ \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{rrrr|r} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 12 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \\ - \\ \leftarrow \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ : \frac{1}{2} \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \leftarrow \\ + \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{2} & 4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Es folgt: $\mathrm{rg}(A) = 2$, I ist lösbar, der Lösungsraum L_I ist ein 2-dimensionaler affiner Unterraum.

Explizite Lösung:

$$\begin{array}{lcl} & & x_4 =: \lambda \\ x_3 + \frac{1}{2}x_4 = 6 & \Rightarrow & x_3 = 6 - \frac{1}{2}\lambda \\ & & x_2 =: \mu \\ x_1 + x_2 \quad - \frac{1}{2}x_4 = 4 & \Rightarrow & x_1 = \frac{1}{2}\lambda - \mu + 4 \end{array}$$

$$\begin{aligned} L_I &= \{(\tfrac{1}{2}\lambda - \mu + 4, \mu, 6 - \tfrac{1}{2}\lambda, \lambda) \mid (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= \{(4,0,6,0) + \lambda(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, 1) + \mu(-1,1,0,0) \mid (\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\} \\ &= (4,0,6,0) + \mathrm{span}\{(\tfrac{1}{2}, 0, -\tfrac{1}{2}, 1), (-1,1,0,0)\} \subseteq \mathbb{R}^4 \end{aligned}$$

Zu (4.26)

Berechnung von A^{-1} für $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 3}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rr} - & - \\ \leftarrow & \\ & \leftarrow \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rl} & \\ + & \cdot(-1) \\ \leftarrow & \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{rr} & \leftarrow \\ \leftarrow & \\ + & - \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \begin{array}{r} \leftarrow \\ - \\ \ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 1 \end{array}\right) \qquad \Rightarrow \qquad A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}^{3\times 3}.$$

Speziell folgt: $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Q})$.