5. Die Determinante

Motivation: Ist V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n und sind $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängige Vektoren in V, so heißt

$$P(v_1, \ldots, v_n) = \left\{ \sum_{i=1}^{n} t_i v_i \mid \forall i \in \{1, \ldots, n\} : 0 \leq t_i \leq 1 \right\}$$

das von $v_1, \ldots, v_n$ aufgespannte Parallelotop.

Bsp.: $n = 2$: Parallotop = Parallelogramm.

Wie es bisher für uns keinen mathematischen Sinn hat von der "Länge eines Vektors $v \in V$" zu sprechen (dazu benötigt man eine zusätzliche "mathematische Struktur" - eine Norm oder ein Skalarprodukt auf V), so benötigt man auch eine zusätzliche Struktur auf V, um "das" Volumen eines Parallelotops definieren zu können. Diese zusätzliche Struktur auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum V heißt eine Determinantenform und ist eine Funktion $D : V^n = \underbrace{V \times \ldots \times V}_{n\text{-mal}} \to \mathbb{R}$, die einer geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ von V eine reelle Zahl ($\neq 0$) zuordnet, deren Betrag wir als Definition für das Volumen von $P(v_1, \ldots, v_n)$ nehmen wollen. (Es stellt sich heraus, daß die Funktion D, die positive und negative Werte annimmt, das mathematisch natürliche Objekt ist. Das Vorzeichen von $D(v_1, \ldots, v_n)$ sagt etwas über die "Orientierung" der geordneten Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ aus, d.h. im Fall $V = \mathbb{R}^3$ (und in physikalischer Sprechweise) ob (v_1, v_2, v_3) ein Rechts- oder ein Linkssystem ist). Damit man so zu einem vernünftigen Volumenbegriff kommt, wird D besondere Eigenschaften haben müssen. Es ist eine erfreuliche Tatsache, daß D durch folgende natürliche Forderungen nahezu eindeutig (d.h. bis auf Multiplikation mit einer reellen Zahl $\neq 0$) bestimmt ist.

(V_1) $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis $\Rightarrow D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

(V_2) Für alle $i \in \{1, \ldots, n\}, (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ und $r \in \mathbb{R}$ gilt:

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, rv_i, v_{i+1}, \ldots, v_n) = rD(v_1, \ldots, v_n)$$

(V_3) Für alle $1 \leq i < j \leq n$ und alle $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ gilt

$$D(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_i + v_j, v_{i+1}, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_n) = D(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_i + v_j, \ldots, v_n)$$

Dabei hat Forderung (V_2) die anschauliche Interpretation, daß das Volumen des Parallotops $P(v_1, \ldots, v_{i-1}, rv_i, v_{i+1}, \ldots, v_n)$ das $|r|$-fache des Volumens von $P(v_1, \ldots, v_n)$ sein soll.

Die anschauliche Bedeutung von (V_3) ist die "Scherungsinvarianz" des Volumens.

(5.1) Def. Sei V ein K-Vektorraum, $k \in \mathbb{N}$. Eine Abbildung $f : V^k \to K$ heißt

(i) k-linear (k-Linearform), falls f in jedem Argument linear ist, d.h. falls für jedes $i \in \{1, \ldots, k\}$ und alle $v_1, \ldots, v_{i-1}, v, w, v_{i+1}, \ldots, v_k \in V$, $\alpha, \beta \in K$ gilt:

$$\begin{aligned} f(v_1, \ldots, v_{i-1}, \alpha v + \beta w, v_{i+1}, \ldots, v_k) &= \alpha f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v, v_{i+1}, \ldots, v_k) \\ &+ \beta f(v_1, \ldots, v_{i-1}, w, v_{i+1}, \ldots, v_k) \end{aligned}$$

(ii) alternierend (oder schiefsymmetrisch), falls für alle $1 \leq i < j \leq k$ und alle $v_1, \ldots, v_k \in V$ gilt: $v_i = v_j \Rightarrow f(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_j, \ldots, v_k) = 0$

(5.2) Lemma. Sei V K-Vektorraum, $\dim V = n$ und $f : V^n \to K$. f erfüllt genau dann die Bedingungen (V_2) (für K statt $\mathbb{R}$) und (V_3), wenn f alternierend und n-linear ist.

Bew.: siehe R. Walter, Einf. i.d. Lin. Alg. (Vieweg-Verlag 1982) S. 146, Satz D).

(5.3) Lemma. Für jede alternierende k-Linearform $f : V^k \to K$ gilt:

(i) $\forall 1 \leq i < j \leq k$: $f(\ldots, \overset{i}{v}, \ldots, \overset{j}{w}, \ldots) = -f(\ldots, \overset{i}{w}, \ldots, \overset{j}{v}, \ldots)$

(ii) $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig $\Rightarrow f(v_1, \ldots, v_n) = 0$

(iii) $\forall 1 \leq i < j \leq k$: $f(\ldots, \overset{i}{v}, \ldots, w \overset{j}{+} \lambda v, \ldots) = f(\ldots, \overset{i}{v}, \ldots, \overset{j}{w}, \ldots)$

Bew.:

(i)

$$\begin{aligned} 0 &= f(\ldots, v+w, \ldots, v+w, \ldots) \\ &= f(\ldots, v, \ldots, v+w, \ldots) + f(\ldots, w, \ldots, v+w, \ldots) \\ &= \underbrace{f(\ldots, v, \ldots, v, \ldots)}_{=0} + f(\ldots, v, \ldots, w, \ldots) \\ &\quad + f(\ldots, w, \ldots, v, \ldots) + \underbrace{f(\ldots, w, \ldots, w, \ldots)}_{=0} \end{aligned}$$

(ii) Sei etwa $v_i = \sum\limits_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{k} \alpha_j v_j$. Dann:

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \alpha_j \underbrace{f(v_1, \ldots, v_{i-1}, v_j, v_{i+1}, \ldots, v_k)}_{=0} = 0$$

(iii) klar.

Wir werden uns als nächstes damit beschäftigen, herauszufinden, wie sich der Wert einer alternierenden Form ändert, wenn man die Argumente ganz beliebig vertauscht ("permutiert"). Zunächst einiges zu diesen Permutationen:

Die Menge $S_n = \{\sigma \mid \sigma : \{1, \ldots, n\} \to \{1, \ldots, n\}, \sigma \text{ bijektiv}\}$ mit der Komposition $\circ$ von Abbildungen als Verknüpfung bildet eine Gruppe, die symmetrische Gruppe. Ein $\sigma \in S_n$ heißt eine Permutation von $\{1, \ldots, n\}$.

Sind $a_1, \ldots, a_k$ Körperelemente, so führen wir in Analogie zum Summensymbol Σ ein:

$$\prod_{i=1}^{k} a_i := a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_k.$$

(5.4) Def.: Ist $\sigma \in S_n$, so heißt

$$\operatorname{sgn}(\sigma) := \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

das Signum von σ.

Bsp.: 1) $\sigma = \mathrm{id}_{\{1,\ldots,n\}} \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = 1$.
2) Ist $\sigma \in S_2$ mit $\sigma(1) := 2$, $\sigma(2) := 1$, so $\operatorname{sgn}(\sigma) = \frac{1-2}{2-1} = -1$.
3) $\sigma \in S_n$ heißt <u>Transposition</u> $\Leftrightarrow \exists 1 \le i < j \le n$: $\sigma(i) = j$, $\sigma(j) = i$ und $\sigma(k) = k$, falls $k \in \{1, \ldots, n\} \setminus \{i, j\}$.

(5.5) Fakt.

(i) $\operatorname{sgn} : S_n \to \{\pm 1\}$
(ii) $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\text{Fehlstandszahl von } \sigma}$, wobei die Fehlstandszahl von σ die Anzahl der Paare (i, j) ist mit $1 \le i < j \le n$ und $\sigma(i) > \sigma(j)$.
(iii) $\sigma \in S_n$ Transposition $\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = -1$ (σ hat $2(j - i) - 1$ Fehlstände!).

Bez.: Eine Permutation σ heißt gerade, falls $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1$, sonst ungerade.

(5.6) Satz. *Für alle* $\sigma, \tau \in S_n$ *gilt* $\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\tau)$*, d.h.* σ *ist Homomorphismus von* $(S_n, \circ)$ *in die Gruppe(!)* $(\{\pm 1\}, \cdot)$.

Bew.: Vorbemerkung: Wegen $\frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i} = \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$ kann man in der Definition von $\operatorname{sgn}(\sigma)$ statt über alle Paare (i, j) mit $1 \le i < j \le n$ zu multiplizieren über irgendeine Menge von Paaren (i, j) multiplizieren, die die Eigenschaft hat, daß die Menge der zugehörigen Paarmengen $\{i, j\}$ die Menge aller 2-elementigen Teilmengen von $\{1, \ldots, n\}$ ist.

$$\operatorname{sgn}(\sigma \circ \tau) = \prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{j - i} = \underbrace{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\sigma(\tau(j)) - \sigma(\tau(i))}{\tau(j) - \tau(i)}}_{\substack{= \operatorname{sgn}(\sigma) \\ \text{(vgl. Vorbemerkung)}}} \quad \underbrace{\prod_{1 \le i < j \le n} \frac{\tau(j) - \tau(i)}{j - i}}_{=:\operatorname{sgn}(\tau)}$$

(5.7) Folgerung.

(i) $\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)$.
(ii) Sei $\tau \in S_n$ ungerade. Dann bildet die Abbildung $\sigma \to \tau \circ \sigma$ die Menge der geraden Permutationen bijektiv auf die Menge der ungeraden Permutationen ab.

Bew.:

(i) $1 = \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = \operatorname{sgn}(\sigma \circ \sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma) \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = \operatorname{sgn}(\sigma^{-1})$.
(ii) $\operatorname{sgn}(\sigma) = 1 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\tau \circ \sigma) = -1$. Die Abbildung $\sigma \to \tau \circ \sigma$ ist injektiv, da aus $\tau \circ \sigma_1 = \tau \circ \sigma_2$ folgt $\tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma_1) = \sigma_1 = \tau^{-1} \circ (\tau \circ \sigma_2) = \sigma_2$. Ist $\tilde{\sigma} \in S_n$ ungerade,

so gilt $\tau \circ (\tau^{-1} \circ \tilde{\sigma}) = \tilde{\sigma}$ und $\operatorname{sgn}(\tau^{-1} \circ \tilde{\sigma}) = \operatorname{sgn}(\tau^{-1}) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) \overset{(i)}{=} \operatorname{sgn}(\tau) \operatorname{sgn}(\tilde{\sigma}) = (-1)(-1) = 1$.

(5.8) Fakt. Ist $n \geq 2$ und $\sigma \in S_n$, so existiert $k \in \{1, \ldots, n\}$ und Transpositionen $\tau_1, \ldots, \tau_k$, so daß $\sigma = \tau_1 \circ \ldots \circ \tau_k$ gilt. Es gilt dann $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$.

Bew.: Offensichtlich (oder per Induktion). $\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^k$ folgt aus (5.6) und (5.5) (iii).

(5.9) Lemma. Sei V K-Vektorraum und $f : V^k \to K$ k-linear und alternierend. Dann gilt für alle $(v_1, \ldots, v_k) \in V^k$ und alle $\sigma \in S_k$:

$$f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \operatorname{sgn}(\sigma) f(v_1, \ldots, v_k).$$

Bew.: Folgt aus (5.3) (i) und (5.8).

(5.10) Satz. *Sei V K-Vektorraum,* $\dim V = n$, *$(v_1, \ldots, v_n)$ Basis V und $\alpha \in K$. Dann gibt es genau eine alternierende n-Linearform $f : V^n \to K$ mit $f(v_1, \ldots, v_n) = \alpha$ und für dieses f gilt: Ist $(w_1, \ldots, w_n) \in V^n$, $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$, so*

$$(*) \qquad f(w_1, \ldots, w_n) = \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}.$$

Speziell: Ist $f(v_1, \ldots, v_n) = 0$ für eine Basis $(v_1, \ldots, v_n)$, so ist $f \equiv 0$.

Bew.: (i) Eindeutigkeit: Sei f alternierende n-Form, $f(v_1, \ldots, v_n) = \alpha$

$$\begin{aligned}
f(w_1, \ldots, w_n) &= f\left(\sum_{i_1=1}^{n} a_{i_1 1} v_{i_1}, \sum_{i_2=1}^{n} a_{i_2 2} v_{i_2}, \ldots, \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_n n} v_{i_n}\right) \\
&\overset{f\ n\text{-linear}}{=} \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \ldots \sum_{i_n=1}^{n} a_{i_1 1} \cdot a_{i_2 2} \cdot \ldots \cdot a_{i_n n} \underbrace{f(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_n})}_{=0,\ \text{falls } k \to i_k \text{ nicht injektiv}} \\
&\overset{f\ \text{alternierend}}{=} \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)1} \cdot a_{\sigma(2)2} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n} f(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(n)}) \\
&\overset{(5.9)}{=} \alpha \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}
\end{aligned}$$

Vorbem. zu (ii): $\sigma \in S_n \Rightarrow \prod\limits_{i=1}^{n} b_i = \prod\limits_{i=1}^{n} b_{\sigma(i)}$ $\quad$ ($\cdot$ kommutativ!)

(ii) Wir zeigen: $\sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)} = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}$.

Denn $\sum\limits_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} \overset{\sigma\in S_n\to\sigma^{-1}\in S_n \text{ bijektiv}}{=} \sum\limits_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \underbrace{a_{1\sigma^{-1}(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma^{-1}(n)}}_{=\prod_{i=1}^n b_i \text{ für } b_i:=a_{i\sigma^{-1}(i)}}$

$\overset{(5.7)(i)}{=} \sum\limits_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \underbrace{a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n}}_{=\prod_{i=1}^n b_{\sigma(i)}}$

(iii) Existenz: Definiere f durch $(*)$. Man sieht leicht, daß f n-linear ist. Außerdem gilt wegen $v_j = \sum\limits_{i=1}^n \delta_{ij} v_i$ (mit $\delta_{ij} = 1$ für $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ für $i \neq j$):

$$f(v_1, \ldots, v_n) = \alpha \sum \operatorname{sgn}(\sigma)\delta_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot\delta_{\sigma(n)n} = \alpha \operatorname{sgn}(\mathrm{id}) = \alpha.$$

Bleibt zu zeigen, daß $f(w_1, \ldots, w_n) = 0$ gilt, falls für ein Paar (i, j) mit $1 \leq i < j \leq n$ gilt: $w_i = w_j$. Ist $w_k = \sum\limits_{l=1}^n a_{lk} v_l$, $1 \leq k \leq n$, so folgt aus $w_i = w_j$:

$(**)$ $$a_{li} = a_{lj} \text{ für } 1 \leq l \leq n.$$

Sei τ die Transposition, die i und j vertauscht.

$$\begin{aligned} f(w_1, \ldots, w_n) &\overset{(ii)}{=} \alpha \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} \overset{(5.7)(ii)}{=} \\ &= \alpha \sum_{\sigma\in S_n \text{gerade}} a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} - \alpha \sum_{\sigma\in S_n \text{gerade}} a_{1\tau\circ\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\tau\circ\sigma(n)} = 0, \end{aligned}$$

da aus $(**)$ folgt: $a_{l\sigma(l)} = a_{l\tau\circ\sigma(l)}$ für alle $l \in \{1, \ldots, n\}$ und alle $\sigma \in S_n$.

(5.11) Def.: Sei V K-Vektorraum, $\dim V = n$. Eine alternierende n-Linearform $D : V^n \to K$, $D \neq 0$, heißt <u>Determinantenform</u> <u>auf</u> V.

Erinnerung: $D \neq 0$ bedeutet: Es existiert $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$: $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Bsp.: $D_0 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $D_0((x_1, x_2), (y_1, y_2)) = x_1 y_2 - x_2 y_1$.

$$D_0(e_1, e_2) = 1$$

(5.12) Folgerung. Sei D Determinantenform auf dem n-dimensionalen K-Vektorraum V und $(v_1, \ldots, v_n) \in V^n$. Dann gilt

(i) $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V \Leftrightarrow D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.
(ii) Ist $f : V^n \to K$ alternierende n-Linearform, so existiert $\alpha \in K : f = \alpha D$.

Bem.: 1) (ii) $\Leftrightarrow$ $\{f \mid f$ alternierende n-Linearform$\}$ ist 1-dimensionaler K-Vektorraum. Die Determinantenformen sind die Elemente $\neq 0$ dieses Vektorraumes.

2) $f = \alpha D$, $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von $V \Rightarrow \alpha = \frac{f(v_1,\ldots,v_n)}{D(v_1,\ldots,v_n)}$

Bew.: (i) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Dann folgt aus (5.10) ("Speziell:") und $D \neq 0$, daß $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$ gilt. Ist $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$, so folgt aus (5.3)(ii), daß die $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, also - wegen $\dim V = n$ - eine Basis von V.

(ii) Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ eine Basis von V und $\alpha := \frac{f(v_1,\ldots,v_n)}{D(v_1,\ldots,v_n)}$. Dann sind f und αD alternierende n-Linearformen, die auf der Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ den gleichen Wert annehmen. Also folgt aus (5.10) (Eindeutigkeit): $f = \alpha D$.

Einschub: Die Determinante quadratischer Matrizen.

In K^n haben wir die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$, die - nach (5.10) - eine "Standarddeterminantenform" $D_0 : K^n \times \ldots \times K^n \to K$ durch

$$D_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$$

eindeutig bestimmt. Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^n$, so seien $A_j := \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$ die "Spaltenvektoren" von A.

(5.13) Def. Die Determinante $\det : K^{n \times n} \to K$ ist definiert durch

$$\det A := D_0(A_1, \ldots, A_n)$$

Bezeichnungsweise: $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$

(5.14) Folgerung (Gottfried Wilhelm Leibniz 1646-1716). Ist $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in K^{n \times n}$, so

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{\sigma(1)1} \cdot \ldots \cdot a_{\sigma(n)n}.$$

Bem.: Beweis (5.10)(ii) $\Rightarrow \det A = \sum\limits_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma) a_{1\sigma(1)} \cdot \ldots \cdot a_{n\sigma(n)}$.

Bew.: $\det(A) = D_0(A_1, \ldots, A_n)$, $A_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} e_i$, $D_0(e_1, \ldots, e_n) = 1 \overset{(5.10)}{\Rightarrow}$ Beh.

Speziell: $n = 1: \quad A = (a_{11}) \to \quad \det A = a_{11}$
$n = 2: \quad A = \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} a_{22} & \end{matrix} \to \quad \det A = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$

$n = 3$: Regel von Sarrus (Rechenverfahren)

$$\begin{array}{ccccccccc} a_{11} & & a_{12} & & a_{13} & & a_{11} & & a_{12} \\ & \diagdown & & \times & & \times & & \diagup & \\ a_{21} & & a_{22} & & a_{23} & & a_{21} & & a_{22} \\ & \diagup & & \times & & \times & & \diagdown & \\ a_{31} & & a_{32} & & a_{33} & & a_{31} & & a_{32} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \det A &= a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} \\ &- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12} \end{aligned}$$

(5.15) Satz (einige Eigenschaften von $\det A$)

(i) $\det A$ *ist n-linear und alternierend in den Spaltenvektoren von* A.
(ii) $\det E_n = 1$.
(iii) $\det A \neq 0 \Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Bew.:

(i) folgt direkt aus der Definition.
(ii) $\det E_n = D_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$.
(iii) $\det A \neq 0 \overset{(5.12)(i)}{\Leftrightarrow}$ Spaltenvektoren linear unabhängig $\Leftrightarrow A \in \mathrm{GL}_n(K)$.

Folgerungen aus (5.15)(i):

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & \alpha a_{1j} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{m1} & \ldots & \alpha a_{nj} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{n1} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

und: $\det(\alpha A) = \alpha^n \det A$.

Vertauscht man 2 Spalten von A, so ändert sich das Vorzeichen der Determinante. Addiert man zu einer Spalte eine Linearkombination <u>der anderen</u> Spalten, so ändert sich $\det A$ nicht, z.B.

$$\begin{vmatrix} a_{11} + \alpha a_{12} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} + \alpha a_{22} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} + \alpha a_{n2} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

(5.15)(iii): $\det A = 0 \Leftrightarrow$ Spaltenvektoren sind linear abhängig.

(5.16) Def. Sei $A \in K^{m\times n}$. Die <u>transponierte Matrix</u> $A^T \in K^{n\times m}$ <u>zu</u> A hat als Zeilen gerade die Spalten von A (in der gleichen Reihenfolge), d.h.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{m1} \\ a_{12} & \ldots & a_{m2} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

oder: $A = (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq m \\ 1\leq j\leq n}} \in K^{m\times n}$, so $A^T = (\tilde{a}_{ji})_{\substack{1\leq j\leq n \\ 1\leq i\leq m}}$ mit $\tilde{a}_{ji} = a_{ij}$.

Bsp.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2\times 3} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3\times 2}$.

(5.17) Folgerung (aus Bew. (5.10)(ii)).

(i) $\forall A \in K^{n\times n} : \det A = \det(A^T)$.

(ii) $\det A$ ist auch in den Zeilenvektoren von A n-linear und alternierend. (D.h. (5.15)(i) + Folgerungen gelten auch für Zeilenvektoren).

Bew.:

(i) $(A^T = (\tilde{a}_{ji})_{\substack{1\le j\le n\\ 1\le i\le n}}$ mit $\tilde{a}_{ji} = a_{ij}$.

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\tilde{a}_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot\tilde{a}_{\sigma(n)n} \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)a_{1\sigma(1)}\cdot\ldots\cdot a_{n\sigma(n)} \overset{\text{Bew.(5.10)(ii)}}{=} \det A.$$

(ii) folgt aus (i).

Konkretes Verfahren zur Berechnung von $\det A$ für größere n: Durch Addition von Vielfachen von Zeilen zu anderen Zeilen und - falls nötig - durch Vertauschung von Zeilen verwandle A in "obere Dreiecksmatrix" $\overline{A} = (\overline{a}_{ij})$ (d.h. $\overline{a}_{ij} = 0$ für $i > j$), analog zu (4.25). Dann gilt, wenn k die Anzahl der Zeilenvertauschungen bezeichnet:

$$\det A = (-1)^k \det\overline{A} = (-1)^k\overline{a}_{11}\cdot\ldots\cdot\overline{a}_{nn}. \text{ Denn:}$$

(5.18) Lemma. Ist $A = (a_{ij}) \in K^{n\times n}$ obere (oder untere) Dreiecksmatrix, so gilt $\det A = a_{11}\cdot\ldots\cdot a_{nn}$.

Bew.: $a_{\sigma(1)1}\cdot\ldots\cdot a_{\sigma(n)n} \neq 0 \Rightarrow \forall i \in \{1,\ldots,n\} : \sigma(i) \le i \Rightarrow \sigma = \mathrm{id} \Rightarrow$ Beh.

Bsp.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 8 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{vmatrix} \begin{array}{l} -4 \mid \; -7 \mid \\ \;\;\hookleftarrow \quad\;\; \mid \\ \qquad\quad\; \hookleftarrow \end{array} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -6 \\ 0 & -6 & -11 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & -6 \end{vmatrix} = -36$$

Zurück zur Theorie:

Bem.: Ist $K = \mathbb{R}$, $\dim V = n$ und $D : V^n \to \mathbb{R}$ Determinantenform, so definiert man das **Volumen** (bzgl. D) $\operatorname{vol}_D(P)$ eines Parallelotops $P = P(v_1,\ldots,v_n) \subseteq V$ durch $\operatorname{vol}_D(P) = |D(v_1,\ldots,v_n)|$. Wegen (5.12)(ii) gilt:

Sind D, $\tilde{D}$ Determinantenformen auf V, so existiert $\alpha \in \mathbb{R}_{>0}$, so daß für alle Parallelotope $P = P(v_1,\ldots,v_n) \subseteq V$ gilt:

$$\operatorname{vol}_{\tilde{D}}(P) = \alpha \operatorname{vol}_D(P).$$

(5.19) Satz und Def. *Sei V n-dimensionaler K-Vektorraum und $L \in \operatorname{End}(V)$. Dann ist für jede Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ von V und jede Determinantenform D auf V der Quotient $\frac{D(L(v_1),\ldots,L(v_n))}{D(v_1,\ldots,v_n)}$ das gleiche Element von K und wir definieren*

$$\det L := \frac{D(L(v_1),\ldots,L(v_n))}{D(v_1,\ldots,v_n)}.$$

Bem.: Sei $K = \mathbb{R}$. Dann gilt für jedes Parallelotop $P \subseteq V^n$ und jede Determinantenform D: $\mathrm{vol}_D(L(P)) = |\det L| \,\mathrm{vol}_D(P)$.
(L linear $\Rightarrow L(P(v_1, \ldots, v_n)) = P(L(v_1), \ldots, L(v_n))$!)

Bew. von (5.19): Wegen (5.12)(i) gilt $D(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$. Aus (5.12)(ii) folgt, daß $\det L$ unabhängig von der Wahl von D ist. Um die Unabhängigkeit von der Wahl der Basis zu beweisen, bemerken wir, daß

$$f : (w_1, \ldots, w_n) \in V^n \to D(L(w_1), \ldots, L(w_n))$$

eine alternierende n-Linearform ist, so daß aus (5.12)(ii) folgt: Es existiert $\alpha \in K$:

$$f = \alpha D.$$

Für jede Basis $v_1, \ldots, v_n)$ von V gilt also:

$$\alpha = \frac{f(v_1, \ldots, v_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} = \frac{D(L(v_1), \ldots, L(v_n))}{D(v_1, \ldots, v_n)} (=: \det L).$$

(5.20) Folgerung. Seien $L, L_1, L_2 \in \mathrm{End}(V), \alpha \in K$. Dann gilt:

(i) $\det(\mathrm{id}_V) = 1$
(ii) $L \in \mathrm{Aut}(V) \Leftrightarrow \det L \neq 0$
(iii) $\det(L_2 \circ L_1) = \det L_2 \det L_1$
(iv) $L \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow \det(L^{-1}) = (\det L)^{-1}$
(v) $\det(\alpha L) = \alpha^n \det(L)$

Bew.:

(ii) $L \in \mathrm{Aut}(V) \overset{(4.5)}{\Leftrightarrow}$ Ist$(v_1, \ldots, v_n)$ Basis, so auch$(L(v_1), \ldots, L(v_n))$
$\overset{(5.12)(i),\,(5.19)}{\Leftrightarrow} \det L \neq 0$.

(iii) 1. Fall: $L_1 \in \mathrm{Aut}(V)$. Sei $(v_1, \ldots, v_n)$ Basis von V. Dann ist $(L(v_1), \ldots, L(v_n))$ Basis von V, und es gilt:

$$\begin{aligned} \det(L_2 \circ L_1) &= \tfrac{D(L_2(L_1(v_1)), \ldots, L_2(L_1(v_n)))}{D(v_1, \ldots, v_n)} \\ &= \tfrac{D(L_2(L_1 v_1), \ldots, L_2(L_1(v_n)))}{D(L_1(v_1), \ldots, L_1(v_n))} \cdot \det L_1 \\ &= \det L_2 \cdot \det L_1 \end{aligned}$$

2. Fall: $L_1 \notin \mathrm{Aut}(V) (\overset{(ii)}{\Leftrightarrow} \det L_1 = 0)$. Dann ist L_1 nicht injektiv, vgl. (4.8). Also ist auch $L_2 \circ L_1$ nicht injektiv, also $\det(L_2 \circ L_1) = 0$. Daraus folgt:

$$0 = \det L_2 \underbrace{\det L_1}_{=0} = \det(L_2 \circ L_1)$$

(iv) $L \in \mathrm{Aut}(V) \Rightarrow 1 \overset{(i)}{=} \det(\mathrm{id}_V) = \det(L^{-1} \circ L) \overset{(iii)}{=} \det(L^{-1}) \det L \Rightarrow$ Beh.
(v) folgt direkt auf Def. (5.19).

Zusammenhang mit der Determinante von Matrizen:

(5.21) Fakt.

(i) Sei $L \in \mathrm{End}(K^n)$ und $\mathrm{Mat}(L) = A$, d.h. "$L(x) = A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$".

$$\text{Dann gilt: } \det L = \det A.$$

(ii) Sei V K-Vektorraum $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n) \in V^n$ Basis von V und $L \in \mathrm{End}(V)$.

$$\text{Dann gilt: } \det L = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)).$$

Bew.:

(i) $\mathrm{Mat}(L) = A \Leftrightarrow L(e_j) = A_j \Rightarrow$

$$\det L = \frac{D_0(L(e_1), \ldots, L(e_n))}{D_0(e_1, \ldots, e_n)} = D_0(A_1, \ldots, A_n) = \det A.$$

(ii) Sei $J \in \mathrm{Hom}(K^n, V)$ der Isomorphismus mit $J(e_j) = v_j$ für $j \in \{1, \ldots, n\}$, vgl. (4.5). Dann gilt $\mathrm{Mat}(J^{-1} \circ L \circ J) = \mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)$, da $J^{-1} \circ L \circ J(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \underbrace{e_i}_{=J^{-1}(v_i)} \Leftrightarrow$

$L(v_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$. Wir verwenden auf V die Determinantenform (!) D, die durch

$$D(w_1, \ldots, w_n) = D_0(J^{-1}(w_1), \ldots, J^{-1}(w_n))$$

definiert ist. Dann gilt $D(v_1, \ldots, v_n) = D_0(e_1, \ldots, e_n) = 1$ und damit

$$\begin{aligned} \det L &= D(L(v_1), \ldots, L(v_n)) = D_0(J^{-1} \circ L(v_1), \ldots, J^{-1} \circ L(v_1)) \\ &= D_0(J^{-1} \circ L \circ J(e_1), \ldots, J^{-1} \circ L \circ J(e_n)) \\ &= \det(J^{-1} \circ L \circ J) \overset{\text{(i)}}{=} \det(\mathrm{Mat}(J^{-1} \circ L \circ J)) = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\mathcal{G}}(L)). \end{aligned}$$

Bem.: Es gilt i.a. <u>nicht</u> $\det L = \det(\mathrm{Mat}_{\mathcal{G}}^{\overline{\mathcal{G}}}(L))$, wenn $\mathcal{G}$ und $\overline{\mathcal{G}}$ verschiedene Basen von V sind.

(5.22) Folgerung (aus (5.20)(ii), (iii), (5.21) und (4.15)).

(i) $A, B \in K^{n \times n} \Rightarrow \det(AB) = \det A \cdot \det B$.
(ii) $A \in \mathrm{GL}_n(K) \Rightarrow \det(A^{-1}) = (\det A)^{-1}$

Speziell besagt (5.22): Die Abbildung $A \to \det A$ ist ein Gruppenhomomorphismus von $(\mathrm{GL}_n(K), \cdot)$ auf $(K \setminus \{0\}, \cdot)$. $\mathrm{SL}_n(K) = \{A \in \mathrm{GL}_n(K) | \det A = 1\}$ ist Untergruppe von $\mathrm{GL}_n(K)$, die <u>spezielle lineare Gruppe</u>.

Eigenwerte und Eigenvektoren (eine Anwendung der Determinante)

(5.23) Def.: Sei V K-Vektorraum, $L \in \mathrm{End}(V)$. $\lambda \in K$ heißt Eigenwert (EW) von L, falls ein $v \in V \setminus \{0\}$ existiert mit $L(v) = \lambda v$. $v \in V$ heißt Eigenvektor (EV) von L, falls $v \neq 0$ gilt und ein $\lambda \in K$ existiert mit $L(v) = \lambda v$. In diesem Fall heißt v ein Eigenvektor zum Eigenwert λ.

Bem.: v EV zum EW λ, $\alpha \in K \setminus \{0\} \Rightarrow \alpha v$ EV zum EW λ.

Bsp.:

1) Ist $L = \lambda \, \mathrm{id}_V$, so ist λ der einzige EW von L und jedes $v \in V \setminus \{0\}$ ist EV zum EW λ.
2) Ist $L : K^n \to K^n$ definiert durch $L(e_i) = \lambda_i e_i$ für alle $i \in \{1, \ldots, n\}$, d.h.
$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix},$$
so sind $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ Eigenwerte von L und $e_1, \ldots, e_n$ Eigenvektoren von L.
3) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (x_1 + x_2, x_2)$ "Scherung", mit
$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
Dann ist $\lambda = 1$ der einzige EW von L und $x \in \mathbb{R}^2$ ist genau dann EV von L, wenn $x = (x_1, 0)$ für ein $x_1 \neq 0$ gilt.
4) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $L(x_1, x_2) = (ax_1 - bx_2, bx_1 + ax_2)$ mit
$$\mathrm{Mat}(L) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$
Es folgt aus Aufgabe 1b), Blatt 11, daß L für $b \neq 0$ keinen (reellen) EW hat. Geometrisch ist L eine "Drehstreckung". Identifiziert man $\mathbb{R}^2$ mit $\mathbb{C}$ durch $(x_1, x_2) \leftrightarrow x_1 + ix_2$, vgl. Kap. 2, so kann man L schreiben als: $L(x_1 + ix_2) = (a + ib)(x_1 + ix_2)$. Die Abbildung, die $z \in \mathbb{C}$ die Zahl $(a + ib)z \in \mathbb{C}$ zuordnet, ist also eine Drehstreckung.
5) "Gekoppelte Schwingungen": Gegeben $A \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$, gesucht Lösungen $x : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ der "Differentialgleichung":
$$(*) \qquad x''(t) = A(x(t)) \text{ für alle } t \in \mathbb{R}.$$
Ist $v \in \mathbb{R}^n$ EV von A zum EW $\lambda \in \mathbb{R}$ und ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ Lösung von $f''(t)$-$\lambda f(t)$ $= 0$ (diese sind explizit bekannt!), so ist $x(t) := f(t)v$ Lösung von $(*)$:
$$x''(t) = f''(t)v = \lambda f(t)v = f(t)A(v) = A(f(t)v) = A(x(t)).$$

(5.24) Satz. *Sei* $1 \leq \dim V < \infty$, $L \in \mathrm{End}(V)$. *Dann gilt:*
$$\lambda \text{ EW } \textit{von } L \Leftrightarrow \det(L - \lambda \, \mathrm{id}_V) = 0.$$

Bew.: $\det(L-\lambda\,\mathrm{id}_V)=0 \overset{(5.20)(\mathrm{ii})}{\Leftrightarrow} (L-\lambda\,\mathrm{id}_V)\notin \mathrm{Aut}(V) \overset{(4.8)}{\Leftrightarrow}$
$\mathrm{kern}(L-\lambda\,\mathrm{id}_V)\neq\{0\} \Leftrightarrow \exists v\in V\setminus\{0\}:(L-\lambda\,\mathrm{id}_V)(v)=0$
$\Leftrightarrow \exists v\in V\setminus\{0\}: L(v)=\lambda v.$

Bem.: Ist $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)=(a_{ij})\in K^{n\times n}$, so gilt $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L-\lambda\,\mathrm{id}_V)=(a_{ij}-\lambda\delta_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$. Also nach (5.21):

$$\begin{aligned}\det(L-\lambda\,\mathrm{id}_V) &= \sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sgn}(\sigma)(a_{1\sigma(1)}-\lambda\delta_{1\sigma(1)})\cdot\ldots\cdot(a_{n\sigma(n)}-\lambda\delta_{n\sigma(n)})\\ &= (-1)^n\lambda^n+\left(\sum_{i=1}^n a_{ii}\right)(-1)^{n-1}\lambda^{n-1}+?\lambda^{n-2}+\ldots+?\lambda+\det L,\end{aligned}$$

mit von den a_{ij} abhängenden Koeffizienten ?, die uns im Moment nicht weiter interessieren. Einen Ausdruck dieser Art nennt man "ein Polynom in (der Variablen) λ".

Bez.: $P_L(\lambda):=\det(L-\lambda\,\mathrm{id}_V)$ heißt das charakteristische Polynom von L.

(5.24) besagt: λ EW von $L\Leftrightarrow P_L(\lambda)=0 \overset{\text{def.}}{\Leftrightarrow} \lambda$ Nullstelle von P_L. Ob Polynome (vom Grad ≥ 1) stets Nullstellen haben, hängt vom Körper K ab!

$K=\mathbb{Q},\mathbb{R} \;\rightarrow\;$ nicht immer, z.B. λ^2+1
$K=\mathbb{C} \;\rightarrow\;$ stets ("Fundamentalsatz der Algebra")

Verfahren zur Bestimmung von EW'en und EV'en eines $L\in\mathrm{End}(V)$:

1) Berechne P_L $(=\det(L-\lambda\,\mathrm{id}_V))$.
2) Bestimme Nullstellen von P_L (= EW'e von L). Das ist oft nur approximativ möglich.
3) λ Nullstelle von $P_L\Rightarrow$ Das lineare Gleichungssystem $L(v)=\lambda v$ besitzt Lösung $v\neq 0$. Bestimme alle Lösungen $\neq 0$(= EVen zum EW λ).

Es ist leicht zu zeigen: Besitzt P_L $n(=\dim V)$ verschiedene Nullstellen, so ist L diagonalisierbar ($\Leftrightarrow$ es existiert Basis $\mathcal{G}$ von V: $\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}}_{\mathcal{G}}(L)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & & & \\ & \ddots & 0 & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & \lambda_n\end{pmatrix}$, nämlich: $\mathcal{G}=(v_1,\ldots,v_n)$, v_i EV von L zum EW λ_i).

Weitere Anwendungen der Determinante:

(5.25) Def.: Eine (geordnete) Basis $(v_1,\ldots,v_n)$ des $\mathbb{R}^n$ heißt positiv orientiert (oder Rechtssystem), falls $D_0(v_1,\ldots,v_n)>0$ (sonst negativ orientiert oder Linkssystem).

Bsp.: $(e_1,\ldots,e_n)$ ist positiv orientiert, $(-e_1,e_2,\ldots,e_n)$ und $(e_2,e_1,e_3,\ldots,e_n)$ sind negativ orientiert.

Bem.: Ist $L \in \mathrm{Aut}(\mathbb{R}^n)$, $\det L > 0$, so gilt:

$$(v_1, \ldots, v_n) \text{ positiv orientierte Basis} \Leftrightarrow (L(v_1), \ldots, L(v_n)) \text{ positiv orientierte Basis.}$$

(5.26) Cramersche Regel (Gabriel Cramer 1704-1752). Sei

$$\mathrm{I} \qquad \begin{array}{ccccc} a_{11}x_1 & + \ldots + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{n1}x_1 & + \ldots + & a_{nn}x_n & = & b_1 \end{array} \qquad \text{oder kurz:} \quad A \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b$$

Gleichungssystem mit n Gleichungen für n Unbekannte. Dann gilt: Ist $\det A \neq 0$, so ist

$$x_k = \frac{1}{\det A} \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1,k-1} & b_1 & a_{1,k+1} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{n,k-1} & b_n & a_{n,k+1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix} \qquad (\text{ für } k = 1, \ldots, n)$$

die (einzige) Lösung von I.

Bew.: $\det A \neq 0 \overset{(5.20)(\mathrm{ii})}{\Leftrightarrow} x \in \mathbb{R}^n \to Ax \in \mathbb{R}^n$ ist bijektiv. Also existiert genau eine Lösung von I, d.h. genau ein $x \in \mathbb{R}^n$: $Ax = b$. Sind $A_1, \ldots, A_n$ die Spaltenvektoren von A, so bedeutet $Ax = b$ gerade

$$x_1A_1 + x_2A_2 + \ldots + x_nA_n = b \quad (\text{vgl. I!})$$

Also gilt:

$$\begin{aligned} D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, b, A_{k+1}, \ldots, A_n) &= D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, \sum_{i=1}^n x_iA_i, A_{k+1}, \ldots, A_n) \\ &\overset{D_0\ n\text{-linear}}{=} \sum_{i=1}^n x_i D_0(A_1, \ldots, A_{k-1}, A_i, A_{k+1}, \ldots, A_n) \\ &\overset{D_0 \text{ alternierend}}{=} x_k \det A. \end{aligned}$$

Eine weitere Erkenntnis, die uns die Determinante schenkt:

Nach (5.15)(iii) wissen wir, daß eine <u>reelle</u> quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ genau dann in $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ liegt, wenn $\det A \neq 0$ gilt. Daraus folgt mit etwas Analysis: Für die "meisten" Matrizen ("für eine offene, dichte Menge" bzw. "für alle bis auf eine Menge vom Maß 0") $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gilt $A \in \mathrm{GL}_n(R)$. Speziell: "Typischerweise" ist ein System von n linearen Gleichungen für n (reelle) Unbekannte eindeutig lösbar. Oder geometrisch: "Typischerweise" schneiden sich (z.B.) zwei 3-dim. affine Unterräume des $\mathbb{R}^6$ in genau einem Punkt des $\mathbb{R}^6$ (2mal 3 lineare Gleichungen für 6 Unbekannte).

Zum Abschluß des Kapitels noch eine (i.a. nicht besonders praktische) Möglichkeit zum Berechnen von Determinanten - der Laplacesche Entwicklungssatz (Pierre Simon Laplace 1749-1827)).

(5.27) Lemma. Ist $\tilde{A} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ und $A := \begin{pmatrix} 1 & 0\ldots 0 \\ 0 & \\ \vdots & \tilde{A} \\ 0 & \end{pmatrix} \in K^{n\times n}$, so gilt

$$\det A = \det \tilde{A}.$$

Bew.: Als Funktion der Spaltenvektoren von $\tilde{A}$ ist $\det A$ $(n-1)$-linear, alternierend, und für $\tilde{A} = E_{n-1}$ gilt $A = E_n$ und $\det E_n = 1$. Mit der Eindeutigkeitsaussage von (5.10) impliziert das: $\det \tilde{A} = \det A$.

Bez.: Zu $A \in K^{n\times n}$ und $1 \leq i, j \leq n$ bezeichne $A_{ij} \in K^{(n-1)\times(n-1)}$ die Matrix, die aus A durch Streichen der i'ten Zeile und der j'ten Spalte entsteht.

Bsp.:

$$A : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 7 & 6 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow A_{23} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 8 & 7 & 5 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

(5.28) Entwicklungssatz. *Für alle $A \in K^{n\times n}$, $j \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:*

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der j'ten Spalte).}$$

Für alle $i \in \{1,\ldots,n\}$ gilt:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij} \quad \textit{(Entwicklung nach der i'ten Spalte).}$$

Bsp.:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} \underset{\text{der 3. Spalte}}{\overset{\text{Entwicklung nach}}{=}} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2$$

$$\underset{\text{der 4. Zeile}}{\overset{\text{oder Entwicklung nach}}{=}} (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} + (-1)^{4+4} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2.$$

Bew.: $A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{pmatrix}, \dots, A_n = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{nn} \end{pmatrix}$ seien die Spaltenvektoren von A.

$$\begin{aligned} \det A &= D_0(A_1, \dots, A_n) = D_0(A_1, \dots, A_j = \textstyle\sum a_{ij} e_i, \dots, A_n) \\ &= \sum_{i=1}^{n} a_{ij} D_0(A_1, \dots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \dots, A_n) \end{aligned}$$

Es bleibt zu zeigen: $D_0(A_1, \dots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \dots, A_n) = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$

$D_0(A_1, \dots, A_{j-1}, e_i, A_{j+1} \dots, A_n) = (-1)^{j-1} D_0(e_i, A_1, \dots, A_{j-1}, A_{j+1}, \dots, A_n)$

$$= \quad (-1)^{j-1} \left| \begin{array}{ccc|cc} 0 & a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 1 & a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ \vdots & & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right| = (-1)^{i+j-2} \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & a_{i1} & \dots & \dots & a_{in} \\ 0 & a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

$$= \quad (-1)^{i+j} \left| \begin{array}{ccc|cc} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & a_{11} & \dots & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{i-1,1} & \dots & \dots & a_{i-1,n} \\ 0 & a_{i+1,1} & \dots & \dots & a_{i+1,n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & a_{n1} & \dots & \dots & a_{nn} \end{array} \right|$$

$$\overset{(5.27)}{=} \quad (-1)^{i+j} \quad \det A_{ij}$$

(hierbei soll der senkrechte Strich in den Determinanten andeuten, daß die j'te Spalte gestrichen ist!)