7. Dualität

In diesem Kapitel geht es um die Begriffe "Dualraum" und "dualer Homomorphismus", die sowohl im endlich- wie im unendlich-dimensionalen Fall (hier als algebraischer Hintergrund für die "Funktionalanalysis") wichtig sind. Dennoch ist diesen Begriffen eine gewisse Unanschaulichkeit eigen. Neben der Vorbereitung auf weiterführende Gegenstände dient dieses Kapitel auch einer sachgerechten Behandlung der Transposition von Matrizen (vgl. (5.16) und (4.23)).

Im folgenden sei K ein Körper und V ein K-Vektorraum. Eine Linearform auf V ist eine Abbildung $l : V \to K$, so daß für alle $\alpha, \beta \in K$ und alle $v, w \in V$ gilt:

$$l(\alpha v + \beta w) = \alpha l(v) + \beta l(w).$$

Mit anderen Worten ausgedrückt ist eine Linearform l gerade ein Vektorraumhomomorphismus von V in den 1-dimensionalen K-Vektorraum K, d.h. $l \in \mathrm{Hom}(V, K)$, vgl. (4.1). In (4.9) wird erklärt, daß $\mathrm{Hom}(V, K)$ eine natürliche K-Vektorraumstruktur besitzt, in der etwa die Addition von zwei Linearformen $l_1, l_2 \in \mathrm{Hom}(V, K)$ "punktweise" definiert ist durch:

$$\forall v \in V : \quad (l_1 + l_2)(v) := l_1(v) + l_2(v).$$

(7.1) Definition. Der K-Vektorraum $V^* := \mathrm{Hom}(V, K) = \{l : V \to K \mid l \text{ Linearform}\}$ heißt Dualraum von V.

Bem.: Aus (4.12)–(4.14) folgt: Ist $\dim V < \infty$, so gilt $\dim V^* = \dim V$.

Erinnerung an (4.6): Ist B eine Basis von V und $\tilde{l} : B \to K$ irgendeine Abbildung, so existiert genau ein $l \in V^*$ mit $l \mid B = \tilde{l}$, d.h. mit $l(v) = \tilde{l}(v)$ für alle $v \in B$.

Im Spezialfall $V = K^n$ mit der Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ erhalten wir: Ist $l \in (K^n)^*$ und $l(e_i) =: a_i \in K$ für $1 \le i \le n$, so gilt

$$l(x_1, \ldots, x_n) = a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i.$$

(Denn $l(x_1, \ldots, x_n) = l(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i l(e_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$.) In diesem Fall ist eine Linearform $l \in (K^n)^*$ also "nichts anderes" als die linke Seite einer einzigen homogenen linearen Gleichung (mit n Unbekannten in K), und die Vektorraumstruktur in $(K^n)^*$ formalisiert genau das, was wir schon immer (Gaußsches Eliminationsverfahren) mit solchen Gleichungen getan haben: wir haben sie mit Körperelementen multipliziert und zueinander addiert. Bezüglich einer Basis $(v_1, \ldots, v_n)$ eines n-dimensionalen K-Vektorraums V entspricht nach (4.11) einem $l \in V^*$ die $(1 \times n)$-Matrix $(a_1, \ldots, a_n) \in K^{1 \times n}$ mit $a_i = l(v_i)$ für $1 \le i \le n$, die man oft auch als "Zeilenvektor" interpretiert.

Bsp.: Auf dem $\mathbb{R}$-Vektorraum $V = C^0([a,b],\mathbb{R}) = \{f \mid f : [a,b] \to \mathbb{R} \text{ stetig}\}$ ist die Integration eine Linearform, d.h. definiert man für alle $f \in V$

$$l(f) := \int_a^b f(t)\,dt,$$

so gilt $l \in V^*$.

(7.2) Satz. *Sei* $\dim V = n$ *und* $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ *eine Basis von* V. *Definiere* $l_i \in V^*$ *für* $1 \leq i \leq n$ *durch*

$$l_i(v_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \textit{für } i = j \\ 0 & \textit{für } i \neq j \end{cases} \quad \textit{für } 1 \leq j \leq n.$$

Dann ist $\mathcal{G}^* = (l_1, \ldots, l_n)$ *Basis von* V^*, *genannt die* <u>*Dualbasis*</u> <u>*zu*</u> $\mathcal{G}$.
Für alle $l \in V^*$ *gilt:* $l = \sum\limits_{i=1}^{n} l(v_i) l_i$.

Bew.:

(i) $\mathcal{G}^*$ ist linear unabhängig: Sei $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i = 0$. Dann gilt für $1 \leq j \leq n$:
$0 = (\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i)(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i l_i(v_j) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{ij} = \alpha_j$.

(ii) $\mathcal{G}^*$ erzeugt V^*: Wir zeigen, daß für jedes $l \in V^*$ gilt: $l = \sum\limits_{i=1}^{n} l(v_i) l_i$. Da beiden Seiten dieser Gleichung Linearformen sind, genügt es nachzuweisen, daß beide Seiten auf allen Basiselementen $v_j, 1 \leq j \leq n$, die gleichen Werte annehmen, vgl. (4.6):

$$\left(\sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i\right)(v_j) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i(v_j) = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) \delta_{ij} = l(v_j).$$

<u>Wichtige Bemerkung</u>: Analog kann man im Fall $\dim V = \infty$ aus einer Basis B eine (ebenfalls unendliche) linear unabhängige Menge $B^* \subseteq V^*$ konstruieren ($\Rightarrow \dim V^* = \infty$). Es gilt aber nicht $\operatorname{span} B^* = V^*$, z.B. läßt sich die Linearform $l \in V^*$ mit $l(b) = 1$ für alle $b \in B$ <u>nicht</u> als (endliche!) Linearkombination von Elementen aus B^* darstellen.

(7.3) Def.: Sind V, W K-Vektorräume und ist $L \in \operatorname{Hom}(V,W)$, so heißt die Abbildung $L^* : W^* \to V^*$, die durch

$$L^*(l) = l \circ L \quad (\text{oder explizit:} \forall v \in V \text{ gilt } (L^*(l))(v) = l(L(v)))$$

definiert ist, die zu L duale Abbildung.

(7.4) Fakt. (i) Die Abbildung $L \in \operatorname{Hom}(V,W) \to L^* \in \operatorname{Hom}(W^*, V^*)$ ist ein injektiver K-Vektorraumhomomorphismus von $\operatorname{Hom}(V,W)$ nach $\operatorname{Hom}(W^*, V^*)$.
(ii) Ist Z ein weiterer K-Vektorraum und ist $J \in \operatorname{Hom}(V,W), L \in \operatorname{Hom}(W,Z)$,
so gilt: $\quad (L \circ J)^* = J^* \circ L^* \in \operatorname{Hom}(Z^*, V^*)$.
Außerdem gilt: $\quad (\mathrm{id}_V)^* = \mathrm{id}_{V^*}$.

Bem.:

1) Aus (4.13), (4.14) und (7.2) folgt, im Fall $\dim V = n < \infty$, $\dim W = m < \infty$: $\dim \mathrm{Hom}(V,W) = m \cdot n = \dim \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$. In diesem Fall ist also die Abbildung $L \in \mathrm{Hom}(V,W) \to L^* \in \mathrm{Hom}(W^*, V^*)$ ein Isomorphismus, vgl. (4.8).
2) In der Sprache der Kategorien besagt (7.4)(ii), daß * ein kontravarianter Funktor auf der Kategorie der K-Vektorräume ist.

Bew.:

(i) Zeige z.B.: $L_1, L_2 \in \mathrm{Hom}(V,W) \Rightarrow (L_1+L_2)^* = L_1^*+L_2^*$. Denn es gilt für alle $l \in W^*$: $(L_1+L_2)^*(l) = l \circ (L_1+L_2) \overset{l \text{ linear}}{=} l \circ L_1 + l \circ L_2 = L_1^*(l) + L_2^*(l) = (L_1^* + L_2^*)(l)$.
Injektivität: Zeige $L \neq 0 \Rightarrow L^* \neq 0$. Ist $L \neq 0$, so existiert ein $v \in V$ mit $L(v) \neq 0$. Ergänze $w := L(v) \neq 0$ zu einer Basis B von W und definiere $l \in W^*$ durch $l(w) = 1$, $l(w') = 0$ für $w' \in B \setminus \{w\}$. Dann gilt $1 = l(L(v)) = (L^*(l))(v)$, also $L^*(l) \neq 0$, also $L^* \neq 0$.

(ii) Für $l \in Z^*$ gilt $(L \circ J)^*(l) = l \circ (L \circ J) = (l \circ L) \circ J = J^*(l \circ L) = J^*(L^*(l)) = (J^* \circ L^*)(l)$.

(7.5) Fakt. Sind $\mathcal{G}_V = (v_1, \ldots, v_n)$ bzw. $\mathcal{G}_W = (w_1, \ldots, w_m)$ Basen von V bzw. W und ist $l \in \mathrm{Hom}(V,W)$, so gilt:

$$\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_V^*}_{\mathcal{G}_W^*}(L^*) = \left(\mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_W}_{\mathcal{G}_V}(L)\right)^T$$

(oder mit Worten: Bezüglich dualer Basen ist die Matrix von L^* gerade die transponierte Matrix von L).

Bem.: Aus (7.4)(ii) und (7.5) folgt, daß für alle $A \in K^{m \times n}$, $B \in K^{n \times p}$ gilt:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T,$$

was man auch leicht direkt nachrechnen kann.

Bew.: Sei $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_W}_{\mathcal{G}_V}(L)$, d.h. es gilt

$$L(v_j) = \sum_{i=1}^m a_{ij} w_i \text{ für } 1 \leq j \leq n.$$

Sei $\mathcal{G}_V^* = (l_1, \ldots, l_n)$, $\mathcal{G}_W^* = (f_1, \ldots, f_m)$. Dann ist $B = (b_{kr})_{\substack{1 \leq k \leq n \\ 1 \leq r \leq m}} = \mathrm{Mat}^{\mathcal{G}_{V^*}}_{\mathcal{G}_W^*}(L^*)$ durch

$$L^*(f_r) = \sum_{k=1}^n b_{kr} l_k \text{ definiert.}$$

Dann gilt für $1 \leq j \leq n$, $1 \leq r \leq m$:

$$(L^*(f_r))(v_j) = \sum_{k=1}^n b_{kr} l_k(v_j) = \sum_{k=1}^n b_{kr} \delta_{kj} = b_{jr}.$$

Also

$$\begin{aligned} b_{jr} &= (L^*(f_r))(v_j) = f_r(L(v_j)) = f_r\left(\sum_{i=1}^{m} a_{ij}w_i\right) \\ &= \sum_{i=1}^{m} a_{ij}f_r(w_i) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij}\delta_{ri} = a_{rj}, \end{aligned}$$

d.h. $B = A^T$.

Bez.: $V^{**} := (V^*)^* = \mathrm{Hom}(V^*, K)$ heißt der Bidualraum von V.

(7.6) Fakt. Es existiert ein "natürlicher" injektiver Homomorphismus

$$h = h_V : V \to V^{**}$$

definiert durch: Für alle $v \in V$, $l \in V^*$ gilt

$$(h(v))(l) := l(v).$$

Bem.:

1) Ist $\dim V < \infty$, so ist $h : V \to V^{**}$ ein Isomorphismus, da $\dim V^{**} = \dim V^* = \dim V$.
2) h heißt "natürlich (oder kanonisch)", weil h unabhängig von irgendwelchen Wahlen (z.B. von Basen) definiert ist. In der Sprache der "Kategorien" läßt sich die Natürlichkeit von h mathematisch präzis formulieren.

Bew.: Injektivität von h: Ist $v \in V \setminus \{0\}$, so existiert ein $l \in V^*$ mit $l(v) \neq 0$ (vgl. den Beweis von (7.4)(i)). Dann gilt $(h(v))(l) = l(v) \neq 0$, also $h(v) \in V^{**} \setminus \{0\}$.

Bez.: Zu einem Untervektorraum U von V definieren wir

$$U^s := \{l \in V^* \mid \forall u \in U : l(u) = 0\}.$$

Zu einem Untervektorraum W von V^* definieren wir

$$W_s := \{v \in V \mid \forall l \in W : l(v) = 0\}.$$

Dann ist U^s Untervektorraum von V^* und W_s Untervektorraum von V, und es gilt

(7.7) Satz. Ist $\dim V < \infty$, so

(i) $\dim U + \dim U^s = \dim V$
(ii) $(U^s)^s = h(U) \subseteq V^{**}$
(iii) $\dim W + \dim W_s = \dim V$

Bem.: (7.7)(iii) kann als Präzisierung und Verallgemeinerung von (3.25) angesehen werden: Ist I ein homogenes lineares Gleichungssystem mit k Gleichungen für n Unbekannte (in K), so gilt $\dim L_I \geq n-k$. Jede Gleichung ist gegeben durch eine Linearform $l_1, \dots, l_k \in (K^n)^*$. Wir setzen $W := \mathrm{span}\{l_1, \dots, l_k\} \subseteq (K^n)^*$. Dann gilt $L_I = W_s$ und (7.7)(iii) impliziert: $\dim L_I = \dim W_s = n - \dim W \geq n - k$ mit "=" genau dann, wenn die "Gleichungen" $l_1, \dots, l_k$ linear unabhängig sind. (Ausgedrückt mittels Matrizen folgt Entsprechendes aus (4.21), (4.22)).

Bew.:

(i) Mit der Bemerkung nach (3.13) ("Basisergänzungssatz") können wir eine Basis $\mathcal{G} = (v_1, \ldots, v_n)$ von V finden, so daß für $k := \dim U$ gilt:

$$U = \operatorname{span}\{v_1, \ldots, v_k\}.$$

Sei $\mathcal{G}^*$ die zu $\mathcal{G}$ duale Basis. Dann gilt mit (7.2):

$$\begin{aligned} l = \sum_{i=1}^{n} l(v_i) l_i \text{ liegt in } U^s &\Leftrightarrow l(v_i) = 0 \text{ für } i = 1, \ldots, k \\ \Leftrightarrow l = \sum_{i=k+1}^{n} l(v_i) l_i &\Leftrightarrow l \in \operatorname{span}\{l_{k+1}, \ldots, l_n\}. \end{aligned}$$

D.h. $U^s = \operatorname{span}\{l_{k+1}, \ldots, l_n\}$ und speziell:

$$\dim U^s = n - k = \dim V - \dim U.$$

(ii) Zeige: $h(U) \subseteq (U^s)^s$. Sei $v \in U$ und $l \in U^s$. Dann gilt

$$(h(v))(l) = l(v) = 0,$$

also $h(v) \in (U^s)^s$. Nach (i) gilt $\dim(U^s)^s = \dim V^* - \dim U^s = \dim V^* - (\dim V - \dim U) = \dim U$. Da h injektiv ist, gilt $\dim h(U) = \dim U (= \dim(U^s)^s)$. Wegen $h(U) \subseteq (U^s)^s$, folgt $h(U) = (U^s)^s$.

(iii) Wir zeigen, daß $W^s = h(W_s)$ gilt, denn daraus folgt mit (i): $\dim W_s = \dim h(W_s) = \dim W^s = \dim V - \dim W$. Ist $w \in W_s$, so gilt für alle $l \in W$: $0 = l(w) = (h(w))(l)$. Daraus folgt $h(w) \in W^s$. Ist $\overline{v} \in W^s \subseteq V^{**}$, so existiert nach (7.6), Bem. 1), ein $v \in V$ mit $h(v) = \overline{v}$. Dann gilt für alle $l \in W$: $0 = \overline{v}(l) = (h(v))(l) = l(v)$. Also $v \in W_s$, und damit $\overline{v} = h(v) \in h(W_s)$.

(7.8) Satz. *Seien V und W K-Vektorräume, $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$. Dann gilt:*

(i) $\ker L^* = (\operatorname{im} L)^s$

(ii) $\ker L = (\operatorname{im} L^*)_s$

Speziell: L *surjektiv* $\Leftrightarrow$ L^* *injektiv*

L^* *surjektiv* $\Rightarrow$ L *injektiv. Die Umkehrung gilt, falls* $\dim W < \infty$.

Bew.:

(i) Zeige: $\ker L^* \subseteq (\operatorname{im} L)^s$. Ist $l \in \ker L^* \subseteq W^*$, so gilt für alle $v \in V$:

$$0 = (L^*(l))(v) = l(L(v)), \text{ d.h. } l \in (\operatorname{im} L)^s.$$

Zeige: $(\operatorname{im} L)^s \subseteq \ker L^*$. Ist $l \in (\operatorname{im} L)^s$, so gilt für alle $v \in V$:

$$l(L(v)) = 0, \text{ also } (L^*(l))(v) = 0. \text{ Daraus folgt } l \in \ker L^*.$$

(ii) Analog zu (i).

"Speziell": vgl. Anwesenheitsaufgabe 4 auf Blatt 4a.

(7.9) Folgerung. Seien V und W K-Vektorräume, $\dim W < \infty$ und $L \in \mathrm{Hom}(V,W)$. Dann gilt: $\dim(\mathrm{im}\, L) = \dim(\mathrm{im}\, L^*)$.

Bew.: $$\begin{aligned}\dim(\mathrm{im}\, L^*) &\overset{(4.8)}{=} \dim W^* - \dim(\ker L^*) \overset{(7.2)}{=} \dim W - \dim(\ker L^*) = \\ &\overset{(7.8)(\mathrm{i})}{=} \dim W - \dim((\mathrm{im}\, L)^s) \overset{(7.7)(\mathrm{i})}{=} \dim W - (\dim W - \dim(\mathrm{im}\, L)) \\ &= \dim(\mathrm{im}\, L)\end{aligned}$$

Eine der berühmtesten mathematischen Erkenntnisse der letzten 50 Jahre – der Atiyah-Singer-Indexsatz – hat damit zu tun, daß (7.9) ohne die Voraussetzung "$\dim W < \infty$" nicht gilt.

Bem.: (7.5) und (7.9) bilden den mathematischen Hintergrund für Satz (4.23) ("Zeilenrang = Spaltenrang"), d.h. $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^T)$.

Zusammenhang: Dualraum $\leftrightarrow$ Bilinearformen

Zu einem K-Vektorraum V betrachten wir die Menge

$$B(V) = \{b \mid b : V \times V \to K \text{ bilinear}\}$$

der Bilinearformen auf V. Sie bildet (mit den wie üblich "punktweise" definierten Verknüpfungen) selbst einen K-Vektorraum. Jedes $b \in B(V)$ definiert Abbildungen $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ und $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ durch: Für alle $v \in V$ ist $\lambda(b)(v) \in V^*$ durch

$$\lambda(b)(v) = b(v,\cdot)$$

definiert, d.h. $(\lambda(b)(v))(w) = b(v,w)$ für alle $w \in V$.

Analog ist $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ definiert durch:

Für alle $v \in V$ gilt $\rho(b)(v) = b(\cdot,v)$, d.h.

$$(\rho(b)(v))(w) = b(w,v) \text{ für alle } w \in V.$$

Man prüft nach, daß in der Tat $\lambda(b), \rho(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$.

(7.10) Def.: $b \in B(V)$ heißt nicht ausgeartet, falls folgende Bedingungen (i) und (ii) gelten:

(i) Ist $v \in V$ und gilt $b(v,w) = 0$ für alle $w \in V$, so gilt $v = 0$.
(ii) Ist $v \in V$ und gilt $b(w,v) = 0$ für alle $w \in V$, so gilt $v = 0$.

Bsp.: Jedes Skalarprodukt ist eine nicht ausgeartete Bilinearform. ($\langle v,w\rangle = 0\ \forall w \in V \Rightarrow \langle v,v\rangle = \|v\|^2 = 0 \Rightarrow v = 0$.)

Bem.: Die Bedingung (7.10)(i) ist äquivalent dazu, daß $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$ injektiv ist, und (7.10)(ii) ist äquivalent dazu, daß $\rho(b)$ injektiv ist.

(7.11) Satz. *Die Abbildungen*

$$\lambda : B(V) \to \mathrm{Hom}(V,V^*), b \in B(V) \to \lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V,V^*)$$

und

$$\rho(b) : B(V) \to \mathrm{Hom}(V, V^*), b \in B(V) \to \rho(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$$

sind natürliche K-Vektorraumisomorphismen.

(7.11) besagt, daß ein Homomorphismus $V \to V^*$ "nichts anderes" als eine (etwas anders geschriebene) Bilinearform auf V ist.

Bew.: Linearität von λ, z.B.:

$$\begin{aligned}(\lambda(b_1 + b_2))(v) &= (b_1 + b_2)(v, \cdot) = b_1(v, \cdot) + b_2(v, \cdot) \\ &= (\lambda(b_1))(v) + (\lambda(b_2))(v) = (\lambda(b_1) + \lambda(b_2))(v).\end{aligned}$$

Injektivität von λ: $b \neq 0 \to \exists v, w \in V$: $b(v, w) \neq 0 \Rightarrow$

$$(\lambda(b)(v))(w) \neq 0 \Rightarrow \lambda(b)(v) \neq 0 \Rightarrow \lambda(b) \neq 0.$$

Surjektivität von λ: Sei $L \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$. Definiere $b : V \times V \to K$ durch $b(v, w) = (L(v))(w)$. Dann gilt $b \in B(V)$ und für alle $v \in V$:

$$\lambda(b)(v) = b(v, \cdot) = L(v), \text{ d.h. } \lambda(b) = L.$$

Bem.: Ist $b \in B(V)$, so ist $\lambda(b)^* \in \mathrm{Hom}(V^{**}, V^*)$, und es gilt für alle $v, w \in V$:

$$(\lambda(b)^*(h(v)))(w) = h(v)(\lambda(b)(w)) = b(w, v).$$

Ist $\dim V < \infty$, so können wir aus dieser Bemerkung ableiten, daß die Bedingungen (7.10)(i) und (ii) äquivalent sind: $b \in B(V)$ und (7.10)(i) gilt $\Leftrightarrow$ $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ ist injektiv $\overset{(7.9)}{\Leftrightarrow}$ $\lambda(b)^* \in \mathrm{Hom}(V^{**}, V^*)$ ist injektiv $\overset{\text{Bem.}}{\Leftrightarrow}$ (7.10)(ii) gilt für b.

(7.12) Folgerung. Sei $\dim V < \infty$ und $b \in B(V)$ nicht ausgeartete Bilinearform. Dann existiert zu jedem $l \in V^*$ genau ein $v \in V$, so daß für alle $w \in V$ gilt:

$$l(w) = b(v, w),$$

nämlich $v = \lambda(b)^{-1}(l)$. Analog existiert genau ein $v' \in V$, so daß für alle $w \in V$ gilt

$$l(w) = b(w, v'),$$

nämlich $v' = \rho(b)^{-1}(l)$.

Bew.: Da b nicht ausgeartet ist, sind $\lambda(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ und $\rho(b) \in \mathrm{Hom}(V, V^*)$ injektiv, vgl. Bem. nach (7.10). Wegen $\dim V = \dim V^* < \infty$ sind $\lambda(b), \rho(b)$ Isomorphismen von V nach V^*. Ist $v := \lambda(b)^{-1}(l)$ und $w \in V$ beliebig, so gilt

$$b(v, w) = (\lambda(b)(v))(w) = (\lambda(b)(\lambda(b)^{-1}(l)))(w) = l(w).$$

Ist umgekehrt $v \in V$ und gilt für alle $w \in V$: $b(v, w) = l(w)$, so folgt

$$b(v, w) = (\lambda(b)(v))(w) = l(w),$$

d.h. $\lambda(b)(v) = l$, und damit $v = \lambda(b)^{-1}(l)$.

Nachtrag: Orientierung von $\mathbb{R}$-Vektorräumen.

Wir wollen nun (7.12) benutzen, um das Kreuzprodukt (auch Vektorprodukt genannt) zu definieren. Dazu benötigen wir den Begriff des "orientierten $\mathbb{R}$-Vektorraums". Das folgende ist eine Verallgemeinerung von (5.25), und zwar auf den Fall beliebiger $\mathbb{R}$-Vektorräume V, mit $1 \leq \dim V = n < \infty$.

(7.13) Def.: Zwei Basen $(v_1, \ldots, v_n)$, $(w_1, \ldots, w_n)$ von V heißen gleich orientiert, falls für den Endomorphismus $L \in \mathrm{End}(V)$, der durch $L(v_i) = w_i$, $1 \leq i \leq n$, definiert ist, gilt: $\det L > 0$.

Bem.: 1) $(v_1, \ldots, v_n)$ und $(w_1, \ldots, w_n)$ sind genau dann gleich orientiert, falls für eine ($\Rightarrow$ jede) Determinantenform D auf V gilt:

$$\frac{D(w_1, \ldots, w_n)}{D(v_1, \ldots, v_n)} > 0, \text{ vgl. (5.19).}$$

2) "gleich orientiert" ist eine Äquivalenzrelation auf der Menge der geordneten Basen V mit zwei Äquivalenzklassen.

(7.14) Def.: Eine Orientierung von V ist die Auswahl einer der beiden Äquivalenzklassen von geordneten Basen von V. Die Basen in der ausgewählten Äquivalenzklasse heißen positiv orientiert.

Bsp.: Die "übliche Orientierung" des $\mathbb{R}^n$ besteht in der Auswahl der Äquivalenzklasse, die die Standardbasis $(e_1, \ldots, e_n)$ enthält, vgl. (5.25).

Bez.: Sei $(V, \langle , \rangle)$ orientierter euklidischer Vektorraum, $0 < \dim V = n < \infty$. Dann existiert genau eine Determinantenform D auf V, so daß für eine ($\Rightarrow$ jede) positiv orientierte ONB von V gilt: $D(v_1, \ldots, v_n) = 1$. Dieses D heißt die kanonische Determinantenform von V.

Bem.: Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ positiv orientierte ONB von V, so kann man für beliebige $(w_1, \ldots, w_n) \in V^n$ den Wert $D(w_1, \ldots, w_n)$ wie folgt berechnen: Ist $w_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ und $A := (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$, so gilt $D(w_1, \ldots, w_n) = \det A$. Das liegt daran, daß diese Formel eine Determinantenform definiert, die auf der gegebenen, positiv orientierten ONB $(v_1, \ldots, v_n)$ den Wert 1 hat (da in diesem Fall $A = E_n$ gilt).

Speziell ist im Fall $V = \mathbb{R}^n$ mit dem Standardskalarprodukt und der üblichen Orientierung, die kanonische Determinantenform gerade die "Standarddeterminantenform" D_0, vgl. (5.13).

Das Kreuzprodukt

(7.15) Def.: Sei $(V, \langle , \rangle)$ orientierter euklidischer Vektorraum, $3 \leq \dim V = n < \infty$, mit kanonischer Determinantenform D. Zu je $n-1$ Vektoren $w_1, \ldots, w_{n-1}$ in V existiert genau ein Vektor $w \in V$, so daß für alle $v \in V$ gilt:

$$(*) \qquad D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) = \langle w, v \rangle.$$

Dieses w heißt das Kreuzprodukt von $w_1, \ldots, w_{n-1}$ und wird durch das Symbol $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ bezeichnet.
Begründung: Die Abbildung $v \in V \to D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) \in \mathbb{R}$ ist eine Linearform auf V. Da $\langle , \rangle$ eine nichtausgeartete Bilinearform ist, folgt Existenz und Eindeutigkeit eines Vektors w, der $(*)$ für alle $v \in V$ erfüllt, aus Folgerung (7.12).

Bem.: Es ist nur das Kreuzprodukt $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ von $n-1$ Vektoren ($n = \dim V$) definiert, d.h. für zwei Vektoren $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^4$ ist $w_1 \times w_2$ nicht definiert!

Eigenschaften des Kreuzprodukts:

(i) Die Abbildung $(w_1, \ldots, w_{n-1}) \in V \times \ldots \times V \to w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \in V$ ist multilinear und alternierend. Speziell gilt: $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear abhängig $\Rightarrow w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = 0$.
Z.B. beweist man wie folgt die Additivität im 1. Argument:

$$\begin{aligned} &\langle (w_1 + w_1') \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle = D(w_1 + w_1', w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) \\ &= D(w_1, w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) + D(w_1', w_2, \ldots, w_{n-1}, \cdot) \\ &= \langle w_1 \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle + \langle w_1' \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle \\ &= \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1} + w_1' \times w_2 \times \ldots \times w_{n-1}, \cdot \rangle \end{aligned}$$

(ii) $L \in O(V) \Rightarrow L(w_1) \times \ldots \times L(w_{n-1}) = \det L \cdot L(w_1 \times \ldots \times w_{n-1})$.
Bew.: $\langle L(w_1) \times \ldots \times L(w_{n-1}), v \rangle = D(L(w_1), \ldots, L(w_n), L(L^{-1}(v)))$
$= \det L \, D(w_1, \ldots, w_{n-1}, L^{-1}(v)) = \det L \cdot \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, L^{-1}(v) \rangle$
$\overset{L \in O(V)}{=} \langle \det L \cdot L(w_1 \times \ldots \times w_{n-1}), v \rangle$

(iii) "Geometrische Definition des Kreuzprodukts": Sind $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig, so ist $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ der eineutig bestimmte Vektor mit:
(a) $w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \in (\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\})^\perp$,
(b) $(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1})$ ist positiv orientierte Basis von V, und
(c) $\| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \| = \mathrm{vol}_{n-1}^{\langle , \rangle}(P(w_1, \ldots, w_{n-1}))$.

Wir zeigen, daß $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ die Eigenschaften (a)–(c) hat:
zu (a): $\langle w_i, w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \rangle = D(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_i) = 0$ für $1 \leq i \leq n-1$.
zu (b):

$$\begin{aligned} D(w_1, \ldots, w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1}) &= \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \rangle \\ &= \| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \|^2 . \end{aligned}$$

zu (c): Zeige zunächst: $w_1, \ldots, w_{n-1}$ linear unabhängig $\Rightarrow w := w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \neq 0$.

Ergänze $w_1, \ldots, w_{n-1}$ zu einer Basis $(w_1, \ldots, w_{n-1}, v)$ von V.
Dann gilt $0 \neq D(w_1, \ldots, w_{n-1}, v) = \langle w_1 \times \ldots \times w_{n-1}, v \rangle$, also $w = w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \neq 0$.

Nun ist die Abbildung, die $v_1, \ldots, v_{n-1} \in \mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ die reelle Zahl $D\left(v_1, \ldots, v_{n-1}, \frac{w}{\|w\|}\right)$ zuordnet, eine normierte Determinantenform auf $\mathrm{span}\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$, also

$$\mathrm{vol}_{n-1}^{\langle , \rangle}(P(w_1, \ldots, w_{n-1})) = D\left(w_1, \ldots, w_{n-1}, \frac{w}{\|w\|}\right) \overset{(b)}{=} \| w_1 \times \ldots \times w_{n-1} \| .$$

Umgekehrt sieht man leicht, daß ein Vektor durch die Eigenschaften (a)–(c) eindeutig bestimmt ist.

Schließlich leiten wir eine explizite Formel her, die es erlaubt, $w_1 \times \ldots \times w_{n-1}$ aus den Komponenten von $w_1, \ldots, w_{n-1}$ bezüglich einer positiv orientierten ONB zu berechnen.

(7.16) Fakt. Ist $(v_1, \ldots, v_n)$ positiv orientierte ONB von V und $w_j = \sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} v_i$ für $1 \leq j \leq n-1$, so gilt

$$w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = \sum_{i=1}^{n} \big((-1)^{n+i} \det A_i\big)\, v_i,$$

wobei $A^i \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ aus $A := (a_{ij})_{\substack{1\leq i\leq n \\ 1\leq j\leq n-1}} \in \mathbb{R}^{n\times(n-1)}$ durch Streichen der i'ten Zeile entsteht.

Bsp.: Im Fall von $V = \mathbb{R}^3$ mit der üblichen Orientierung und dem Standardskalarprodukt betrachten wir die positiv orientierte ONB (e_1, e_2, e_3) und

$$\begin{aligned} w_1 &=: \; a = (a_1, a_2, a_3) = \sum_{i=1}^{3} a_i\, e_i \in \mathbb{R}^3 \text{ und} \\ w_2 &=: \; b = (b_1, b_2, b_3) = \sum_{i=1}^{3} b_i\, e_i \in \mathbb{R}^3. \end{aligned}$$

Dann ist $A \in \mathbb{R}^{3\times 2}$ die Matrix

$$\begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_2 \end{pmatrix}$$

und es gilt: $a \times b = \sum_{i=1}^{3} \left((-1)^{i+3} \det A_i\right) e_i = (a_2 b_3 - a_3 b_1, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1)$.

Bew. von (7.16): Für alle $x = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i v_i \in V$ gilt aufgrund der Bem. nach (7.14):

$$\begin{aligned} D(w_1, \ldots, w_{n-1}, x) &= \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n-1} & x_1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn-1} & x_n \end{vmatrix} \overset{\substack{\text{Entwicklung nach} \\ \text{der letzten Spalte}}}{=} \sum_{i=1}^{n} (-1)^{n+i} \det A_i x_i \\ &= \left\langle \sum_{i=1}^{n} \left((-1)^{n+i} \det A_i\right) v_i, x \right\rangle. \end{aligned}$$

Also: $w_1 \times \ldots \times w_{n-1} = \sum\limits_{i=1}^{n} \left((-1)^{n+i} \det A_i\right) v_i$.

Bsp.: Es sei $V = \mathbb{R}^{n+1}$ mit üblicher Orientierung und Standardskalarprodukt. Es sei $e_1, \ldots, e_n$ die Standardbasis des $\mathbb{R}^n$ und $s_1, \ldots, s_n$ reelle Zahlen. Wir betrachten die Vektoren $w_1 := (e_1, s_1), \ldots, w_n := (e_n, s_n)$ im $\mathbb{R}^{n+1}$. Dann gilt:

$$\mathrm{vol}_n^{\langle,\rangle}(P(w_1, \ldots, w_n)) = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (s_i)^2}$$

(vgl. Blatt 2, Aufgabe 4 für die Fälle $n = 2, 3$).

Bew.: Nach (c) und (7.16) gilt:

$$\mathrm{vol}_n(P(w_1, \ldots, w_n)) \overset{(c)}{=} \| w_1 \times \ldots \times w_n \| \overset{(7.16)}{=} \sqrt{\sum_{i=1}^{n+1} (\det A_i)^2}, \text{ wobei}$$

A_i aus der $((n+1) \times n)$-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & \ldots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ \vdots & & & \ddots & \\ 0 & & \ldots & \ldots & 1 \\ s_1 & s_2 & \ldots & \ldots & s_n \end{pmatrix}$$

durch Streichen der i'ten Zeile entsteht. Offensichtlich gilt $\det A_{n+1} = 1$ und $|\det A_i| = |s_i|$ für $1 \leq i \leq n$.

Nachtrag: Quotientenraum (manchmal auch Faktorraum genannt).

Vor der Beschäftigung mit diesem Nachtrag ist es gut, sich (1.23), (1.24) und die darauf folgenden Tatsachen über Äquivalenzrelationen ins Gedächtnis zu rufen.

Sei V ein K-Vektorraum und U Untervektorraum von V. Wir definieren eine Äquivalenzrelation $\sim_U$ auf V durch:

$$v \sim_U w \Leftrightarrow v - w \in U.$$

Die Transitivität von $\sim_U$ sieht man so ein:

$$v \sim_U w \text{ und } w \sim_U z \Rightarrow v - w \in U \text{ und } w - z \in U \overset{U \text{ Untervektorraum}}{\Longrightarrow}$$
$$(v - w) + (w - z) = v - z \in U \Rightarrow v \sim_U z.$$

Bem.: Die Äquivalenzklasse von $v \in V$ bezüglich $\sim_U$ ist genau der affine Unterraum $v + U = \{v + u \mid u \in U\}$, vgl. (3.26) und die Abschnitte vor (3.26).

Bew.: (i) Ist $w \in v + U$, d.h. $w = v + u$ für ein $u \in U$, so gilt $w - v = u \in U$, also $w \sim_U v$. Deshalb ist $v + U$ in der Äquivalenzklasse von v enthalten.
(ii) Ist $z \in V$ und $z \sim_U v$, so gilt $z - v =: u \in U$, also $z = v + u \in v + U$. Das zeigt, daß die Äquivalenzklasse von v in $v + U$ enthalten ist.

Es ist für das Folgende ganz wichtig, im Gedächtnis zu behalten, daß in der Darstellung einer Äquivalenzklasse in der Form $v+U$ das Element $v \in V$ nicht eindeutig bestimmt ist (es sei denn $U = \{0\}$), denn es gilt:

$$v + U = w + U \Leftrightarrow v \sim_U w \Leftrightarrow v - w \in U.$$

Man nennt jedes Element aus $v+U$ einen Repräsentanten der Äquivalenzklasse $v+U$.

Wir bezeichnen mit

$$V/U := \{v + U \mid v \in V\}$$

die Menge der Äquivalenzklassen von $\sim_U$ und mit

$$\pi : V \to V/U, \pi(v) := v + U$$

die "kanonische Projektion".

(7.17) Fakt: Es gibt genau eine K-Vektorraumstruktur auf der Menge V/U, so daß $\pi : V \to V/U$ ein Homomorphismus ist.

Bew.: Die Eindeutigkeit der K-Vektorraumstruktur folgt aus der Surjektivität von π. Denn sind $\alpha \in K$ und $v+U$, $w+U \in V/U$, so gilt $\pi(v) = v+U$, $\pi(w) = w+U$. Ist nun π ein Homomorphismus, so muß für das (noch zu definierende) Produkt $\alpha(v+U) \in V/U$ gelten:

$$\alpha(v+U) = \alpha\pi(v) \overset{\pi \in \mathrm{Hom}(V,V/U)}{=} \pi(\alpha v) = (\alpha v) + U.$$

Und ebenso:

$$(v+U) + (w+U) = \pi(v) + \pi(w) = \pi(v+w) = (v+w) + U.$$

Wenn π ein Homomorphismus werden soll, müssen wir also die Gleichungen

$$(*) \qquad \alpha(v+U) = (\alpha v) + U$$

und

$$(**) \qquad (v+U) + (w+U) = (v+w) + U$$

zur Definition der in den Gleichungen links stehenden Operationen verwenden. Es ist nicht klar, daß das möglich ist, denn es besteht die Gefahr, daß etwa in $(*)$ $v+U = v'+U$ gilt, aber $(\alpha v)+U \neq (\alpha v')+U$. Wir müssen zeigen, daß das nicht passieren kann. Man sagt dazu, wir müssen zeigen, daß die "Definition" $(*)$ unabhängig von der Wahl des Repräsentanten v von $v+U$ ist, und Analoges für $(**)$: aus $v+U = v'+U$ folgt $v - v' \in U$, und damit $\alpha(v-v') = \alpha v - \alpha v' \in U$, also $\alpha v \sim_U \alpha v'$ oder $(\alpha v)+U = (\alpha v')+U$. Aus $v+U = v'+U$ und $w+U = w'+U$ folgt $v-v' \in U$, $w-w' \in U$, und damit $(v-v')+(w-w') = (v+w)-(v'+w') \in U$, also $(v+w) \sim_U (v'+w')$ oder $(v+w)+U = (v'+w')+U$.

Das zeigt, daß wir $(*)$ und $(**)$ benützen können, um eine Multiplikation mit Skalaren ($\in K$) und eine Addition auf V/U zu definieren. Wir bemerken noch, daß wir beim Beweis der Repräsentantenunabhängigkeit von $(**)$ die Kommutativität der Addition in V benutzt haben. Wir werden später eine analoge Quotientenkonstruktion für Gruppen kennenlernen, und dabei tritt an der entsprechenden Stelle für nichtabelsche Gruppen ein Problem auf.

Nun sind natürlich noch die Vektorraumaxiome für V/U mit den durch $(*)$ und $(**)$ definierten Operationen nachzuprüfen. Das ist länglich, aber leicht. Wir bemerken noch, daß

$$U = \pi(0) = \pi(u) = u + U \qquad (\text{für alle } u \in U)$$

das 0-Element von V/U ist.

Bsp.: $V = \mathbb{R}^3$ und $U = \operatorname{span}\{(1,1,1)\} = \{(x,x,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

$V/U =$ Menge der affinen Geraden, die parallel zu U sind.

$\pi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3/U$ ordnet einen Punkt $v \in \mathbb{R}^3$ die v enthaltende Gerade $v + U$ dieser Parallelschar zu. Da jede dieser Geraden $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ in genau einem Punkt trifft, ist $(\pi \mid \mathbb{R}^2 \times \{0\}) : \mathbb{R}^2 \times \{0\} \to \mathbb{R}^3/U$ ein bijektiver Homomorphismus, also ein Isomorphismus, d.h. die (durch $(**)$ definierte) Summe von zwei Geraden kann man wie folgt erhalten: Man bestimmt die Schnittpunkte der zwei Geraden mit $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$ und erhält die "Summengerade" als die zu U parallele Gerade durch die Summe (in $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$) der Schnittpunkte. Es ist aber wichtiger die Struktur der Quotientenkonstruktion zu verstehen, als dieses explizite Beispiel.

Es ist nicht leicht zu erklären, warum diese Quotientenkonstruktion wichtig ist. Sie macht aus V ein vergröbertes Abbild V/U, in dem alles, was den Unterraum U betrifft, "vergessen" wird. Wir werden etwa in (7.19) sehen, daß zu jedem Homomorphismus $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ ein "natürlicher" Homomorphismus $\overline{L} : V/\ker L \to W$ mit $\overline{L} \circ \pi = L$ gehört, der injektiv ist. Es ist wichtig zu wissen, daß analoge Quotientenkonstruktionen für alle algebraischen Strukturen (Gruppen, Ringe, Moduln) möglich und oft nützlich sind. Hier wird kurz noch der Fall einer (möglicherweise nichtabelschen) Gruppe $(G, \cdot)$ skizziert:

Ist H eine Untergruppe von G, so definiert

$$g_1 \sim_H g_2 \Leftrightarrow g_2^{-1} g_1 \in H$$

eine Äquivalenzrelation $\sim_H$ auf G, deren Äquivalenzklassen gerade die "Linksnebenklassen"

$$gH = \{gh \mid h \in H\}$$

von H sind. Man setzt wieder $G/H = \{gH \mid g \in G\}$ und $\pi : G \to G/H$, $\pi(g) = gH$. Versucht man nun, in Analogie zu (7.17), G/H so mit einer Gruppenstruktur zu versehen, daß π ein Homomorphismus wird, so kann man die (unangenehme) Überraschung erleben, daß das nicht geht: Man würde gern $(g_1H) \circ (g_2H)$ durch $(g_1g_2)H$ definieren, aber es stellt sich heraus, daß (im nichtabelschen Fall) $(g_1g_2)H$ sehr wohl von der Wahl der Repräsentanten g_1 von g_1H und g_2 vn g_2H abhängen kann, d.h. aus $g_1H = g_1'H$ und $g_2H = g_2'H$ folgt nicht notwendig $(g_1g_2)H = (g_1'g_2')H$. Es ist nicht schwer einzusehen, daß das genau dann klappt, wenn für alle $g \in G$

$$gHg^{-1} = H$$

gilt, wobei $gHg^{-1} := \{ghg^{-1} \mid h \in H\}$. Untergruppen H mit dieser Eigenschaft heißen normal, und genau für solche normale Untergruppen H ist es möglich, auf G/H eine

Gruppenstruktur zu definieren, so daß $\pi : G \to G/H$ homomorph ist. Ist G abelsch, so gilt natürlich $ghg^{-1} = gg^{-1}h = h$, und alle Untergruppen von G sind normal. Zu Beginn von Kapitel 2 haben wir (im Prinzip) auf diese Art aus $(G, \cdot) = (\mathbb{Z}, +)$ und einer Zahl $p \in \mathbb{N}$ die endliche zyklische Gruppe $(\mathbb{Z}_p, +)$ konstruiert: Als Untergruppe H nehmen wir

$$p\,\mathbb{Z} = \{n \in \mathbb{Z} \mid p \text{ teilt } n\}$$

und erhalten $\mathbb{Z}_p$ als $\mathbb{Z}/p\,\mathbb{Z}$.

Zurück zu den K-Vektorräumen V:

(7.18) Fakt: (i) Sind U und W komplementäre Untervektorräume von V, d.h. gilt $V = U \oplus W$, so ist $\pi|W : W \to V/U$ ein Isomorphismus.
(ii) Ist $\dim U < \infty$, so gilt $\dim(V/U) = \dim V - \dim U$.

Bew.: (i) Surjektivität von $\pi|W$: Sei $v + U$ ein beliebiges Element von V/U. Dann besitzt v eine (eindeutige) Darstellung als $v = u + w$ mit $u \in U$, $w \in W$. Wegen $\pi(u) = 0 \in V/U$ gilt: $v + U = \pi(v) = \pi(u + w) = \pi(u) + \pi(w) = \pi(w)$.

Injektivität von $\pi|W$: Sei $w \in W$ und $\pi(w) = 0 \in V/U$. Dann gilt $w + U = U$, d.h. $w \in U$. Also $w \in W \cap U$. Wir haben aber vorausgesetzt, daß $U \oplus W$ eine direkte Summe ist, d.h. daß $U \cap W = \{0\}$ gilt, vgl. (3.19). Also folgt aus $w \in W \cap U$, daß $w = 0$ gilt. Das zeigt $\ker(\pi|W) = \{0\}$, d.h. $\pi|W$ ist injektiv.

(ii) Nach (3.21) existiert ein zu U komplementärer Untervektorraum W von V, und es gilt $\dim U + \dim W = \dim V$. Nach (i) gilt $\dim W = \dim(V/U)$, und wegen $\dim U < \infty$ kann man die Gleichung auch als $\dim(V/U) = \dim W = \dim V - \dim U$ schreiben.

(7.19) Isomorphiesatz. *Zu* $L \in \operatorname{Hom}(V, W)$ *existiert genau ein Homomorphismus* $\overline{L} \in \operatorname{Hom}(V/\ker L, W)$*, für den* $L = \overline{L} \circ \pi$ *gilt.* $\overline{L}$ *ist injektiv und ein Isomorphismus von* $V/\ker L$ *auf* $\operatorname{im} L \subseteq W$.

Bem.: Ist $\dim(\ker L) < \infty$, so folgt aus der letzten Aussage, daß

$$\dim(\text{im } L) = \dim(V/\ker L) \overset{(7.18)}{=} \dim V - \dim(\ker L)$$

gilt. Das ist ein nicht wirklich neuer Beweis des Dimensionssatzes (4.8).

Bew.: Da $\pi : V \to V/\ker L$ surjektiv ist, existiert höchstens eine Abbildung $\overline{L} : V|\ker L \to W$ mit $\overline{L} \circ \pi = L$. Wenn $\overline{L}$ existiert, muß $\overline{L}$ für alle $v + \ker L \in V/\ker L$ durch

$$(*) \qquad \overline{L}(v + \ker L) = \overline{L}(\pi(v)) = L(v)$$

gegeben sein und wegen $L|\ker L = 0$ ist $(*)$ in der Tat unabhängig von der Wahl des Repräsentanten der Äquivalenzklasse $v + \ker L$. Es gilt dann für alle $\alpha \in K$, $v_1 + \ker L \in$

$V/\ker L$, $v_2 + \ker L \in V/\ker L$:

$$\begin{aligned}
\overline{L}(\alpha(v_1 + \ker L)) &= \overline{L}((\alpha v_1) + \ker L) = L(\alpha v_1) = \alpha L(v_1) \\
&= \alpha \overline{L}(v_1 + \ker L) \text{ und} \\
\overline{L}((v_1 + \ker L) + (v_2 + \ker L)) &= \overline{L}((v_1 + v_2) + \ker L) = L(v_1 + v_2) = L(v_1) + L(v_2) \\
&= \overline{L}(v_1 + \ker L) + \overline{L}(v_2 + \ker L).
\end{aligned}$$

Das zeigt, daß $\overline{L} : V/\ker L \to W$ ein Homomorphismus ist. Ist $v + \ker L \in V/\ker L$ und gilt $\overline{L}(v + \ker L) = 0$, so folgt $L(v) = 0$, d.h. $v \in \ker L$ und damit $v + \ker L = 0 \in V/\ker L$. Das zeigt $\ker \overline{L} = \{0\}$, d.h. $\overline{L}$ ist injektiv. Da $\overline{L}(V/\ker L) = \overline{L}(\pi(V)) = L(V) = \operatorname{im} L$ gilt, ist $\overline{L}$ als Abbildung von $V/\ker L$ nach $\operatorname{im} L$ auch surjektiv, also ein Isomorphismus von $V/\ker L$ auf $\operatorname{im} L$.