Kapitel 4

Raumkurven

4.1 Graphische Darstellung

Für die Darstellung von Raumkurven existiert in MAPLE der Befehl `spacecurve` aus der Bibliothek `plots`. Diesem Befehl lassen sich noch einige Parameter mitgeben. So kann man zum Beispiel durch den Parameter `numpoints` die Anzahl der Punkte angeben, die berechnet werden sollen. Dazwischen wird die Kurve interpoliert. Außerdem lässt sich durch den Parameter `axes` angeben, ob und wie die Koordinatenachsen angezeigt werden sollen. Auch schon bekannte Parameter wie `scaling=constrained` lassen sich weiterhin verwenden. Die Syntax ist etwas anders als bei der Darstellung von ebenen Kurven, der Parameterbereich steht außerhalb der Liste mit den einzelnen Komponenten.

```
> with(LinearAlgebra): with(linalg): with(plots):
```

```
> alpha := t -> <cos(t),sin(t),cos(5*t)>;
```

$$\alpha := t \to \langle \cos(t), \sin(t), \cos(5\,t) \rangle$$

```
> spacecurve([alpha(t)[1],alpha(t)[2],alpha(t)[3]], t=0..2*Pi,
> numpoints=100, axes=normal);
```

Anstatt die einzelnen Komponenten einzeln aufzuführen, ist es auch möglich, den Vektor mit dem Befehl `convert` in eine Liste umzuwandeln:

```
> al:=convert(alpha(t),list);
```

$$al := [\cos(t), \sin(t), \cos(5\,t)]$$

```
> spacecurve(al, t=0..2*Pi, numpoints=100, axes=normal);
```

Plot: 401.eps

Wenn Sie mit der linken Maustaste in die Graphik klicken, erscheinen in der Menüleiste neue Menüpunkte, mit denen sich die Darstellung verändern lässt. So lassen sich Farben und Perspektiven ändern und es lassen sich Koordinatenachsen ein- und ausblenden. Probieren Sie einige Einstellungen aus, um sich mit der Bedienung vertraut zu machen. Alternativ können Sie mit der rechten Maustaste in die Graphik klicken, dann erscheint ein Pop-up-Menü. Diese Funktion ist recht störungsanfällig und führt leicht zum Absturz von MAPLE. Sie sollten deshalb zuvor ihr Arbeitsblatt abspeichern.

Sie können das Objekt auch drehen indem Sie die linke Maustaste gedrückt halten und dabei die Maus bewegen.

Die Darstellung mit dem Befehl `spacecurve` hat den Nachteil, dass die Linien recht dünn sind, und der räumliche Eindruck oft recht unbefriedigend. Eine bessere räumliche Darstellung erhält man oft mit dem Befehl `tubeplot`, der die Kurve als „Schlauch“ darstellt. Der Radius des Schlauches wird durch den Parameter `radius` angegeben. Die Voreinstellung ist 1.

```
> tubeplot(al, t=0..2*Pi, numpoints=100, style=patchnogrid,
> radius=.04);
```

Aufgaben

Aufgabe 4.1.1 Zeichnen Sie die Schraubenlinie (Helix)

$$\alpha_{a,b}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

und die Kurve

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)\ .$$

Aufgabe 4.1.2 Berechnen und zeichnen Sie dreidimensionale Lissajous-Kurven. Diese Kurven entstehen als Bahnkurve eines Teilchens, das gleichzeitig und unabhängig in allen drei Koordinatenrichtungen mit verschiedenen Frequenzen um den Nullpunkt schwingt. Nehmen Sie an, dass jede der Schwingungen harmonisch ist, d. h. durch die Funktion $\sin(\omega_i t)$ für $i = 1, 2, 3$ beschrieben wird. Probieren Sie verschiedene Werte für ω_1, ω_2 und ω_3.

Aufgabe 4.1.3 Zeichnen Sie die Raumkurven

$$\alpha_{r_1,r_2,a,b}(t) = \Big(\big(r_1 + r_2\cos(at)\big)\sin(bt), \big(r_1 + r_2\cos(at)\big)\cos(bt), r_2\sin(at)\Big)$$

für verschiedene Parameterwerte. Achten Sie darauf, genügend Punkte berechnen zu lassen. Was passiert, wenn zuwenig Punkte berechnet werden? Welchen Einfluss haben die Parameter auf die Form der Kurve? Auf welcher Fläche im Raum bewegt sich die Kurve?

4.2 Geometrische Größen

Nachdem im letzten Kapitel beschrieben wurde, wie ebene Kurven mit MAPLE untersucht werden können, sollen Sie nun in diesem Kapitel analoge Methoden auf Raumkurven anwenden. Dazu werden hier nocheinmal kurz alle Definitionen zusammengefasst, die in diesem Zusammenhang von Bedeutung sind.

Es sei $\alpha\colon (a, b) \to \mathbb{R}^3$ eine nach Bogenlänge parametrisierte reguläre Kurve. Wir definieren folgende drei Vektorfelder längs dieser Kurve:

- das *Tangentialvektorfeld* $\mathbf{t}_\alpha = \alpha'$,
- das *Hauptnormalenvektorfeld* $\mathbf{n}_\alpha = \frac{\alpha''}{\|\alpha''\|}$
- und das *Binormalenvektorfeld* $\mathbf{b}_\alpha = \mathbf{t}_\alpha \times \mathbf{n}_\alpha$.

Dabei setzen wir voraus, dass die zweite Ableitung der Kurve existiert, und dass in jedem Punkt die erste und die zweite Ableitung der Kurve linear unabhängig sind. Für diese drei Vektorfelder, auch *Frenetsches Dreibein* genannt, gelten die *Frenetschen Formeln*:

$$\begin{array}{rcccc} \mathbf{t}'_\alpha & = & & \kappa_\alpha\,\mathbf{n}_\alpha, & \\ \mathbf{n}'_\alpha & = & -\kappa_\alpha\,\mathbf{t}_\alpha & & +\,\tau_\alpha\,\mathbf{b}_\alpha, \\ \mathbf{b}'_\alpha & = & & -\tau_\alpha\,\mathbf{n}. & \end{array}$$

Die hierin vorkommenden Funktionen sind *die Krümmung* $\kappa_\alpha = \|\alpha''\|$ und *die Torsion* (*Windung*) τ_α der Kurve α. Die Ebene, die durch den Punkt $\alpha(t)$ geht und von den Vektoren $\mathbf{t}_\alpha(t)$ und $\mathbf{n}_\alpha(t)$ aufgespannt wird, heißt *die Schmiegebene*, die durch $\mathbf{t}_\alpha(t)$ und $\mathbf{b}_\alpha(t)$ aufgespannte Ebene heißt *rektifizierende Ebene*, und die durch $\mathbf{n}_\alpha(t)$ und $\mathbf{b}_\alpha(t)$ aufgespannte Ebene heißt *Normalenebene*.

Es ist zwar immer möglich, eine beliebige Kurve nach der Bogenlänge zu parametrisieren, praktisch ist diese Parametrisierung jedoch im allgemeinen nicht mehr mit MAPLE bearbeitbar. Aus diesem Grund sollen hier auch die Möglichkeiten angegeben werden, die oben definierten Größen bei beliebiger Parametrisierung zu berechnen.

Den Einheitstangentialvektor $\mathbf{t}_\alpha$ erhalten wir durch Normierung des Ableitungsvektors:

$$\mathbf{t}_\alpha(t) = \frac{\alpha'(t)}{\|\alpha'(t)\|} \; .$$

Da die zweite Ableitung von α nicht notwendigerweise senkrecht auf $\mathbf{t}$ steht, erhalten wir $\mathbf{n}_\alpha$ entweder durch Ableiten der Einheitsnormalen $\mathbf{t}_\alpha$ oder indem wir das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren auf α'' anwenden:

$$\mathbf{n}_\alpha(t) = \frac{\mathbf{t}'_\alpha(t)}{\left\|\mathbf{t}'_\alpha(t)\right\|} = \frac{\alpha''(t) - \big(\alpha''(t)\cdot\mathbf{t}_\alpha(t)\big)\mathbf{t}_\alpha(t)}{\left\|\alpha''(t) - \big(\alpha''(t)\cdot\mathbf{t}_\alpha(t)\big)\mathbf{t}_\alpha(t)\right\|} \; .$$

Den Binormalenvektor erhalten wir wie im Falle der Parametrisierung nach Bogenlänge durch

$$\mathbf{b}_\alpha(t) = \mathbf{t}_\alpha(t) \times \mathbf{n}_\alpha(t) \; .$$

Die Formeln für die Krümmung und die Torsion sind

$$\kappa_\alpha(t) = \frac{\|\alpha'(t) \times \alpha''(t)\|}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

und

$$\tau_\alpha(t) = \frac{\big(\alpha'(t) \times \alpha''(t)\big)\cdot\alpha'''(t)}{\|\alpha' \times \alpha''(t)\|^2} = \frac{\det\big(\alpha'(t), \alpha''(t), \alpha'''(t)\big)}{\|\alpha' \times \alpha''(t)\|^2} \; .$$

Einige der im vorigen Kapitel definierten MAPLE-Befehle können Sie auch für Raumkurven verwenden, z. B. `eukl_norm` und `normier`. Die Definition des Ableitungsoperators `abl` benutzt jedoch explizit, dass die Vektoren zwei Komponenten haben. Wir passen den Befehl an und machen die Zahl der Komponenten variabel. Bei einem Vektor `V`, der mit dem Datentyp `Vector` des `LinearAlgebra`-Pakets realisiert ist, erhält man die Zahl der Komponenten mit dem Befehl `op(1,V)`. Für die

Ausgabe liefert der Befehl `Vector(n, i -> w[i])` einen Vektor mit n Komponenten, die durch die Liste `w[1]`, ..., `w[n]` gegeben sind. (Näheres dazu finden Sie unter `?Vector` in der MAPLE-Hilfe).

```
> abl:=proc(alpha)
> local t, a, b, i, n;
> n:=op(1,alpha(t));
> for i from 1 to n do
> a[i]:=unapply(alpha(t)[i],t);
> b[i]:=D(a[i])
> od;
> t-> Vector(n, i-> b[i](t))
> end:
> abl(alpha)(t);
```

$$\begin{bmatrix} -\sin(t) \\ \cos(t) \\ -5\sin(5\,t) \end{bmatrix}$$

Aufgaben

Aufgabe 4.2.1 Definieren Sie die eingeführten Begriffe in MAPLE. Gehen Sie dabei wie im letzten Kapitel vor und definieren Sie alle Begriffe als Funktion der Kurve.

Wenden Sie Ihre Definitionen auf die Schraubenlinie (Helix)

$$\alpha_{a,b}(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$$

und auf die Kurve

$$\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$$

an.

Aufgabe 4.2.2 Der Schnitt einer Zylinderfläche mit Radius a um die x-Achse mit einer Zylinderfläche mit Radius b um die y-Achse besteht für $a \neq b$ aus zwei geschlossenen Kurven. Stellen Sie eine dieser Kurven in parametrisierter Form dar. Führen Sie dabei diese Berechnungen von Hand durch. Berechnen Sie anschließend mit MAPLE Krümmung und Torsion dieser Kurve.

Aufgabe 4.2.3 Sie können einen Vektor V in einem Kurvenpunkt $\alpha(t)$ darstellen, indem Sie die Strecke von $\alpha(t)$ nach $\alpha(t)+V$ zeichnen. (Eine Pfeilspitze hinzuzufügen wäre zuviel der Mühe.)

Zeichnen Sie in dem Bild der Schraubenlinie (Aufgabe 4.1.1) in mehreren Kurvenpunkten das zugehörige Frenetsche Dreibein ein.