# Kapitel 5

# Flächen im dreidimensionalen Raum

## 5.1 Die Darstellung parametrisierter Flächen mit MAPLE

In diesem Abschnitt wollen wir uns mit dem Studium parametrisierter Flächen im dreidimensionalen Raum beschäftigen. Diese werden gegeben durch eine offene Menge $U \subset \mathbb{R}^2$ und eine differenzierbare Abbildung $X: U \to \mathbb{R}^3$. Wir sagen $X$ ist *regulär* im Punkt $q = (u, v) \in U$, falls die Ableitung $DX(q)$ von $X$ im Punkt $q$ den (maximal möglichen) Rang 2 besitzt. Ist $X$ in jedem Punkt regulär, so sprechen wir von einer *regulär parametrisierten Fläche.*

Ähnlich wie wir Kurven unter MAPLE definiert haben, lassen sich auch parametrisierte Flächen mit MAPLE beschreiben. Die Abbildungen besitzen diesmal zwei Argumente und liefern als Ergebnis einen dreidimensionalen Vektor. Wir benutzen wieder den Datentyp `Vector` aus dem `LinearAlgebra`-Paket.

Zur Definition einer Kugel in MAPLE gibt man zum Beispiel

```
> with(linalg): with(LinearAlgebra): with(plots):
```

```
> Kugel:=(u,v)-> <cos(v)*cos(u), sin(v)*cos(u), sin(u)>;
```

$$Kugel := (u, v) \to \langle \cos(v)\cos(u), \sin(v)\cos(u), \sin(u)\rangle$$

ein. Auf welchem Definitionsbereich ist die Parametrisierung regulär ?

Die folgende Formel liefert ein dreidimensionales Analogon zur Astroide:

```
> Astroide3d:=(u,v) -> <cos(v)^3*cos(u)^3, sin(v)^3*cos(u)^3,
> sin(u)^3>;
```

$$\mathit{Astroide3d} := (u, v) \to \langle \cos(v)^3 \cos(u)^3, \sin(v)^3 \cos(u)^3, \sin(u)^3 \rangle$$

Überlegen Sie sich auch an diesem Beispiel, für welchen Definitionsbereich die Parametrisierung regulär ist und was in den singulären Punkten passiert.

Zur graphischen Darstellung parametrisierter Flächen dient der Befehl `plot3d`. Die Eingabe

```
> plot3d(Kugel(u,v), u=-Pi/2..Pi/2, v= 0..3*Pi/2);
```

ergibt beispielsweise folgende Graphik:

**Plot: 5.101.eps**

Sie können auch hier wieder den Parameter `scaling` verwenden, um der Kugel eine Kugelform zu geben.

Wie schon im Kapitel über Raumkurven erwähnt wurde, erhalten Sie, indem Sie mit der linken Maustaste in die Graphik klicken, eine Reihe von Menüpunkten, mit deren Hilfe sich die Darstellung verändern lässt. Zu den schon beschriebenen Möglichkeiten kommen noch diejenigen hinzu, die Fläche wahlweise aus kleinen Flächenstücken zusammengesetzt oder als Gittermodell darzustellen. Außerdem hat man die Wahl, ob verdeckte Linien ausgeblendet oder gezeichnet werden. Experimentieren Sie etwas mit den verschiedenen Menüpunkten, um sich mit den verschiedenen Darstellungsweisen vertraut zu machen.

Sie können auch weitere Optionen direkt im Plot-Befehl angeben. Näheres finden Sie in der MAPLE-Hilfe mit `?plot3d,option`.

```
> plot3d(Astroide3d(u,v), u=-Pi/2..Pi/2, v=
> 0..2*Pi,scaling=constrained,
> style=patchnogrid, axes=boxed, projection=.9,lightmodel=light4,
> orientation=[20,70]);
```

**Plot: 5.102.eps**

## Aufgaben

**Aufgabe 5.1.1** Machen Sie sich ein Bild der folgenden Flächen $X\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$. Schränken Sie den Definitionsbereich dabei geeignet ein.

1. Der Affensattel
$$X(u,v) = \left(u, v, u^3 - 3uv^2\right) ,$$
2. Das Helikoid
$$X(u,v) = \left(v \sin u, v \cos u, u\right) ,$$
3. Die Kleinsche Flasche
$$\begin{aligned} X(u,v) = \Big( &\left(a + \cos\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin v - \sin\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin 2v\right) \cos u, \\ &\left(a + \cos\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin v - \sin\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin 2v\right) \sin u, \\ &\sin\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin v + \cos\left(\tfrac{u}{2}\right) \sin 2v \Big) \end{aligned}$$
4. Die Enneperfläche
$$X(u,v) = \left(u - \tfrac{u^3}{3} + uv^2, v - \tfrac{v^3}{3} + u^2 v, u^2 - v^2\right)$$
5. Die Steinersche römische Fläche, die eine Immersion der projektiven Ebene in den $\mathbb{R}^3$ darstellt,
$$X(u,v) = \left(\sin 2u \cos^2 v, \sin u \sin 2v, \cos u \sin 2v\right)$$
6. Die Kreuzhaube, die auch eine Immersion der projektiven Ebene in den $\mathbb{R}^3$ darstellt,
$$X(u,v) = \left(\tfrac{1}{2} \sin u \sin 2v, \sin 2u \cos^2 v, \cos 2u \cos^2 v\right)$$

**Aufgabe 5.1.2** Ist $\alpha\colon (a,b) \to \mathbb{R}^3$ eine reguläre Raumkurve, deren Krümmung nirgends verschwindet, so wird die *Röhrenfläche* vom Radius $r > 0$ um $\alpha$ definiert durch
$$X_{\alpha,r}(t,\varphi) := \alpha(t) + r\cos(\varphi)\,\mathbf{n}_\alpha(t) + r\sin(\varphi)\,\mathbf{b}_\alpha(t) \ .$$

Schreiben Sie eine Prozedur, die einem Parameter $r > 0$ und einer Raumkurve $\alpha$ die zugehörige Röhrenfläche zuordnet.

Zeichnen Sie ein paar Beispiele und vergleichen Sie mit der Ausgabe des Befehls `tubeplot`.

Erstellen Sie ein Bild, das eine Raumkurve $\alpha$ zusammen mit einer der zugehörigen Röhrenfläche zeigt, und ein Bild, das zu einer Kurve mehrere Röhrenflächen zu verschiedenen Radien zeigt.

**Aufgabe 5.1.3** Ist $\alpha$ eine Kurve in der $x$-$y$-Ebene, so nennt man die Fläche, die man erhält, indem man $\alpha$ um die $x$-Achse rotieren lässt, die von $\alpha$ erzeugte *Rotationsfläche.*

Schreiben Sie eine Prozedur, die einer ebenen Kurve die von ihr erzeugte Rotationsfläche zuordnet.

Zeichnen Sie ein paar Beispiele, insbesondere den von der Kurve

$$\alpha(t) := (\cos t, 2 + \sin t)$$

erzeugten *Rotationstorus.*

## 5.2 Tangentialebene und Normalenvektor

In diesem Abschnitt werden einige erste geometrischen Größen parametrisierter Flächen kurz vorgestellt. Sei $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ eine regulär parametrisierte Fläche. Wir bezeichnen die Koordinaten im $\mathbb{R}^2$ mit $u$ und $v$. Für die partiellen Ableitungen von $X$ in $u$- und $v$-Richtung schreiben wir

$$D_1X(u,v) = X_1(u,v) = X_u(u,v) = \frac{\partial X}{\partial u}(u,v) = DX(u,v)e_1$$

und

$$D_2X(u,v) = X_2(u,v) = X_v(u,v) = \frac{\partial X}{\partial v}(u,v) = DX(u,v)e_2\,.$$

Die Regularität von $X$ im Punkt $(u,v)$ bedeutet gerade, dass $X_1(u,v)$ und $X_2(u,v)$ linear unabhängig sind.

Die *Tangentialebene* von $X$ im Punkt $X(u,v)$ ist die affine Ebene

$$\begin{aligned} T\bigl(X,(u,v)\bigr) &:= X(u,v) + DX(u,v)(\mathbb{R}^2) \\ &= \bigl\{X(u,v) + rX_1(u,v) + sX_2(u,v) \bigm| r,s \in \mathbb{R}\bigr\}\,. \end{aligned}$$

Es gibt genau einen Vektor der Länge 1, der senkrecht auf den Tangentialvektoren $X_1(u,v)$ und $X_2(u,v)$ steht und zusammen mit ihnen die gleiche Orientierung wie die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ besitzt. Diesen Vektor bezeichnen wir als *Normalenvektor* der Fläche im Punkt $X(u,v)$. Er berechnet sich aus der Formel

$$N(u,v) := N_X(u,v) := \frac{X_1(u,v) \times X_2(u,v)}{\bigl\|X_1(u,v) \times X_2(u,v)\bigr\|}\,.$$

Um diese Größen in MAPLE zu realisieren benötigen wir partielle Ableitungen einer vektorwertigen Abbildung. Partielle Ableitungen gewöhlicher Funktionen erhält man mit dem Operator `D`, wobei die Indizes der Variablen, nach denen abgeleitet werden soll, in einer Liste in eckigen Klammern angegeben werden, vgl. Kapitel 2. Folgende Prozedur leistet dasselbe für vektorwertige Funktionen von zwei Variablen. (Für die Ableitung von Listen-wertigen Funktionen leistet der Befehl `del` aus dem `diffgeo`-Paket dasselbe wie `D` für gewöhnliche Funktionen).

```
> part_abl:= proc(alpha)
> local var, a, b, i, n;
> n:=op(1,alpha(u,v));
> for i from 1 to n do
> a[i]:=unapply(alpha(u,v)[i],u,v);
> b[i]:=D[op(procname)](a[i])
> od;
> (u,v)-> Vector(n, i-> b[i](u,v))
> end:
```

Hier ist eine Erklärung notwendig. Die Liste mit den Indizes wird von MAPLE nicht als Argument der Prozedur, sondern als Teil des Namens behandelt. Innerhalb der Prozedur wird auf sie mit dem Befehl `op(procname)` zugegriffen.

Beispiel (die Definition von `Kugel` werde aus Abschnitt 5.1 übernommen):

```
> x1:=part_abl[1](Kugel)(u,v); x2:=part_abl[2](Kugel)(u,v);
```

$$x1 := \begin{bmatrix} -\cos(v)\sin(u) \\ -\sin(v)\sin(u) \\ \cos(u) \end{bmatrix}$$

$$x2 := \begin{bmatrix} -\sin(v)\cos(u) \\ \cos(v)\cos(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

```
> x12:= part_abl[1,2](Kugel)(u,v);
```

$$x12 := \begin{bmatrix} \sin(v)\sin(u) \\ -\cos(v)\sin(u) \\ 0 \end{bmatrix}$$

## Aufgaben

**Aufgabe 5.2.1** Erstellen Sie Prozeduren, die einer parametrisierten Fläche $X$ die tangentialen Vektorfelder $X_1$ und $X_2$ und das Normalenvektorfeld $N_X$ zuordnen.

Berechnen Sie das Normalenvektorfeld der Kugel, des Affensattels und des Helikoids. Prüfen Sie Ihre Definitionen. Beispielsweise müssen Normalenvektor und Ortsvektor der Kugel mit Radius 1 bis auf das Vorzeichen übereinstimmen. Versuchen Sie nach Möglichkeit, die Ausdrücke mit `simplify` zu vereinfachen.

Berechnen Sie eine Formel für das Normalenvektorfeld einer Rotationsfläche (Aufgabe 5.1.3) und einer Fläche, die als Graph einer Funktion entsteht.

**Aufgabe 5.2.2** Erstelle Sie eine Prozedur, die einer parametrisierten Fläche $X$ und einem Punkt $(u, v) \in U$ ihres Parameterbereichs die Tangentialebene $T\big(X, (u, v)\big)$ zuordnet.

Erstellen Sie ein Bild, das die Sattelfläche

$$X(u, v) := (u, v, u^2 - v^2)$$

zusammen mit ihrer Tangentialebene im Nullpunkt darstellt.

Machen Sie dasselbe für den Affensattel aus Aufgabe 5.1.1. Zeichnen Sie noch ein paar weitere Tangentialebenen ein.

**Aufgabe 5.2.3** Erstellen Sie ein Bild einer Fläche ihrer Wahl, in das Sie an mehreren Stellen die Tangentialvektoren $X_1$ und $X_2$ und den Normalenvektor einzeichnen.

Zeichnen Sie an einer dieser Stellen $(u_0, v_0)$ die Parameterlinien $u \mapsto X(u, v_0)$ und $v \mapsto X(u_0, v)$ ein.

# 5.3 Die erste Fundamentalform

Wieder bezeichne $U$ eine offene Teilmenge des $\mathbb{R}^2$ und $X\colon U \to \mathbb{R}^3$ ein regulär parametrisiertes Flächenstück. Mit Hilfe von $X$ und dem Standardskalarprodukt des $\mathbb{R}^3$ wird jedem Punkt $(u, v) \in U$ wie folgt ein Skalarprodukt $I_{(u,v)}$ auf $\mathbb{R}^2$ zugeordnet.

$$I_{(u,v)}(w, \tilde{w}) = \big(DX(u, v)w\big) \cdot \big(DX(u, v)\tilde{w}\big) \qquad \text{für } w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2$$

Die Abbildung $I$, die $(u, v) \in U$ das Skalarprodukt $I_{(u,v)}$ zuordnet, heißt *erste Fundamentalform* von $X$. Für die Matrixdarstellung

$$\begin{pmatrix} g_{11}(u, v) & g_{12}(u, v) \\ g_{21}(u, v) & g_{22}(u, v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E(u, v) & F(u, v) \\ F(u, v) & G(u, v) \end{pmatrix}$$

von $I_{(u,v)}$ bezüglich der Standardbasis $e_1, e_2$ des $\mathbb{R}^2$ erhält man

$$g_{ij}(u,v) = I_{(u,v)}(e_i, e_j) = D_iX(u,v) \cdot D_jX(u,v) = X_i(u,v) \cdot X_j(u,v) \quad (i,j = 1,2) ,$$

also

$$\begin{aligned} E(u,v) &= X_1(u,v) \cdot X_1(u,v) , \\ F(u,v) &= X_1(u,v) \cdot X_2(u,v) , \\ G(u,v) &= X_2(u,v) \cdot X_2(u,v) . \end{aligned}$$

(Dass all diese Größen von $X$ abhängen wird hier in der Notation nicht berücksichtigt.)

Ist $\alpha\colon [a,b] \to U$ eine Kurve im Parameterbereich $U$, so können wir die Bildkurve $\hat{\alpha} := X \circ \alpha\colon [a,b] \to X(U) \subset \mathbb{R}^3$ betrachten. Die Länge von $\hat{\alpha}$ erhält man dann, indem man die Länge von $\alpha$ bezüglich der ersten Fundamentalform $I$ berechnet, d. h. durch die Formel

$$L(\hat{\alpha}) = L_I(\alpha) = \int_a^b \sqrt{\|\hat{\alpha}'(t)\|}\, dt = \int_a^b \sqrt{I_{\alpha(t)}(\alpha'(t), \alpha'(t))}\, dt$$

Ist $X\colon U \to \mathbb{R}$ ein reguläres Flächenstück, so berechnet man seinen Flächeninhalt durch

$$\begin{aligned} A(X) &= \iint_U \sqrt{\det\big(g_{ij}(u,v)_{ij}\big)}\, du\, dv = \iint_U \sqrt{E(u,v)\, G(u,v) - F(u,v)^2}\, du\, dv \\ &= \iint_U \big\|X_1(u,v) \times X_2(u,v)\big\|\, du\, dv \end{aligned}$$

## Aufgaben

**Aufgabe 5.3.1** Modellieren Sie die erste Fundamentalform in MAPLE. Berechnen Sie die erste Fundamentalform der Kugel, des Affensattels und des Helikoids.

**Aufgabe 5.3.2** Die *Mercator-Parametrisierung* der Sphäre ist gegeben durch

$$X_{\mathrm{Merc}}(u,v) := \Big(\frac{\cos u}{\cosh v}, \frac{\sin u}{\cosh v}, \tanh v\Big) .$$

Berechnen Sie die erste Fundamentalform von $X$ und zeigen Sie, dass $X_{\mathrm{Merc}}$ winkeltreu ist (d. h., dass $I_{(u,v)}$ in jedem Punkt $(u,v)$ ein Vielfaches des Standardskalarprodukts ist).

Ist $\alpha$ eine Gerade in $U = \mathbb{R}^2$, so heißt ihre Bildkurve $\hat{\alpha} = X_{\mathrm{Merc}} \circ \alpha$ *Loxodrome.*

Erstellen Sie ein Bild, das eine Sphäre in der Mercator-Parametrisierung und eine Loxodrome zeigt. Berechnen Sie die Länge einer Loxodrome.

**Aufgabe 5.3.3** Erstellen Sie eine Prozedur, die den Flächeninhalt eines parametrischen Flächenstücks $X$ berechnet.

Testen Sie diese Prozedur an verschiedenen Beispielen, insbesondere an verschiedenen Parametrisierungen der Sphäre.

## 5.4 Regelflächen

In diesem Abschnitt soll eine Klasse von Flächen betrachtet werden, die sich aus gegebenen Kurven im Raum herleiten lassen: die Regelflächen. Man benötigt zur Definition einer Regelfläche eine differenzierbare Kurve $\alpha\colon I \to \mathbb{R}^3$ und ein differenzierbares Vektorfeld $V\colon I \to \mathbb{R}^3$. Die Regelfläche ist die Vereinigung aller Geraden, die in einem Punkt $\alpha(t)$ die Richtung $V(t)$ besitzen. Ihre Parametrisierung ist also durch die Formel

$$X(u,v) = \alpha(u) + v\,V(u)$$

gegeben. Einfache Beispiele für Regelflächen sind der Zylinder und das Helikoid. Weitere Beispiele finden Sie in der folgenden Aufgabe.

**Aufgabe 5.4.1** Definieren Sie die Regelflächen in MAPLE. Testen Sie Ihre Definitionen an den folgenden Beispielen und zeichnen Sie die Flächen mit MAPLE.

1. Das einschalige elliptische Hyperboloid ist folgendermaßen als Regelfläche definiert: die Kurve $\alpha$ ist die Parametrisierung einer Ellipse in der $x,y$-Ebene (vgl. Aufgabe 3.1.1) und das Vektorfeld $V$ wird durch $V(t) = \alpha'(t) + (0,0,c)$ gegeben.

2. Das *Plückersche Konoid* wird durch die Definitionen $\alpha(t) = (0,0,\cos t \sin t)$ und durch das Vektorfeld $V(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ beschrieben.

Eine wichtige Klasse von Regelflächen sind die Tangentenflächen. Hier wird als Vektorfeld $V$ die Ableitung der Kurve $\alpha$ gewählt. Wie man schon an den obigen Beispielen sehen konnte, ist die Parametrisierung einer Regelfläche nicht immer regulär. Bei den Tangentenflächen treten zum Beispiel immer Singularitäten in den Punkten der Kurve, also für $v = 0$, auf.

**Aufgabe 5.4.2** Implementieren Sie Tangentenflächen in MAPLE und machen Sie sich ein Bild der Tangentenflächen, die durch folgende Kurven definiert werden:

1. die Kurve $\alpha(t) = (t, t^2, t^3)$,

2. die Helix.