Kapitel 6

Die zweite Fundamentalform und Krümmungen

6.1 Die zweite Fundamentalform

Im Abschnitt 5.2 wurde das Normalenvektorfeld N einer regulär parametrisierten Fläche $X\colon U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definiert. Durch die Ableitung von N wird die *zweite Fundamentalform II* von X definiert. Diese ordnet jedem $(u,v) \in U$ eine symmetrische Bilinearform $II_{(u,v)}$ auf $\mathbb{R}^2$ zu durch die Festsetzung

$$II_{(u,v)}(w,\tilde{w}) = -\big(DN(u,v)\,w\big) \cdot \big(DX(u,v)\,\tilde{w}\big)\,, \qquad w,\tilde{w} \in \mathbb{R}^2$$

Aus $N(u,v) \cdot \big(DX(u,v)\,w\big) = 0$ folgt durch Ableiten:

$$II_{(u,v)}(w,\tilde{w}) = N(u,v) \cdot \big(D^2X(u,v)(w,\tilde{w})\big)$$

Hieraus folgt die Symmetrie von $II_{(u,v)}$. Bezüglich der Standardbasis e_1, e_2 wird $II_{(u,v)}$ durch die symmetrische Matrix

$$\begin{pmatrix} h_{11}(u,v) & h_{12}(u,v) \\ h_{21}(u,v) & h_{22}(u,v) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l(u,v) & m(u,v) \\ m(u,v) & n(u,v) \end{pmatrix}$$

beschrieben, wobei die Funktionen h_{ij} bzw. l, m und n durch

$$h_{ij}(u,v) = -D_iN(u,v) \cdot D_jX(u,v) = N(u,v) \cdot D_iD_jX(u,v)$$

bzw.

$$\begin{aligned} l(u,v) &= -N_u(u,v) \cdot X_u(u,v) = N(u,v) \cdot X_{uu}(u,v)\,, \\ m(u,v) &= -N_u(u,v) \cdot X_v(u,v) = -N_v(u,v) \cdot X_u(u,v) = N(u,v) \cdot X_{uv}(u,v)\,, \\ n(u,v) &= -N_v(u,v) \cdot X_v(u,v) = N(u,v) \cdot X_{vv}(u,v) \end{aligned}$$

gegeben sind. Nach einem Satz der Linearen Algebra existiert zu $(u, v) \in U$ eine eindeutig bestimmte lineare Selbstabbildung $L_{(u,v)} \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$II_{(u,v)}(w, \tilde{w}) = I_{(u,v)}(L_{(u,v)}w, \tilde{w}) \text{ für } w, \tilde{w} \in \mathbb{R}^2 ,$$

die *Weingartenabbildung* von X in (u, v). Ihre Matrix

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix}$$

lässt sich aus den Matrizen der ersten und zweiten Fundamentalform berechnen. Aus der Definition ergibt sich

$$h_{ij} = \sum_{k=1}^{2} g_{ik} L_{kj}$$

bzw. in Matrixschreibweise

$$\begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} ,$$

woraus sich

$$\begin{pmatrix} L_{11} & L_{12} \\ L_{21} & L_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} l & m \\ m & n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ h_{21} & h_{22} \end{pmatrix} \tag{6.1}$$

ergibt. Obwohl die Weingartenabbildung selbstadjungiert ist, braucht ihre Matrix nicht symmetrisch zu sein, da die Standardbasis e_1, e_2 im Allgemeinen bezüglich $I_{(u,v)}$ keine Orthonormalbasis bildet.

Aufgaben

Aufgabe 6.1.1 Definieren Sie die zweite Fundamentalform und ihre Komponenten und die Weingartenabbildung für allgemeine Flächen in MAPLE.

Leiten Sie die zweite Fundamentalform und die Matrix der Weingartenabbildung von Kugel, Torus, Affensattel und Helikoid her. Überprüfen Sie Ihre Definitionen anhand der ersten und der zweiten Fundamentalform der Kugel. Sie sollten bis auf das Vorzeichen identisch sein.

Aufgabe 6.1.2 Leiten Sie mit MAPLE allgemeine Formeln für die zweiten Fundamentalformen einer beliebigen Rotationsfläche und einer Fläche, die ein Graph einer beliebigen Funktion ist, her.

6.2 Krümmungen

Nach der Vorarbeit des letzten Abschnitts ist es nun einfach, die verschiedenen Krümmungsbegriffe der Flächentheorie zu definieren und in MAPLE zu implementieren. So sind beispielsweise die Hauptkrümmungen gerade die Eigenwerte der Weingartenabbildung L. Nachdem Sie im letzten Abschnitt ein Verfahren in MAPLE implementiert haben, mit dem Sie die Matrix der Weingartenabbildung zu einer beliebigen Fläche errechnen können, bietet MAPLE Ihnen jetzt die Möglichkeit, die zugehörigen Hauptkrümmungen als deren Eigenwerte zu berechnen.

Das Paket `linalg` bietet dazu den Befehl `eigenvalues`. Ist `A` eine quadratische Matrix vom Typ `matrix`, so liefert `eigenvalues(A)` die Eigenwerte von `A` als durch Kommas getrennte Folge.

Das Paket `LinearAlgebra` bietet den Befehl `Eigenvalues`, der angewandt auf eine quadratische Matrix vom Typ `Matrix` die Eigenwerte angeordnet als Komponenten eines Spaltenvektors liefert.

Aufgabe 6.2.1 Berechnen Sie die Hauptkrümmungen von Torus und Helikoid sowie der Fläche

$$X(u, v) = (u, v, uv)\ .$$

Da `eigenvalues` (aus dem `linalg`-Paket) die Eigenwerte durch ein Komma getrennt ausgibt, kann der Befehl `map(simplify,%);` nicht direkt ausgeführt werden. Man muss in diesem Fall die Eigenwerte zuerst durch eckige Klammern zu einer Liste zusammengefügen, der korrekte Befehl würde also `map(simplify,[%]);` lauten.

Berechnen Sie auch die Hauptkrümmungen des Affensattels für die Punkte $(0, 0)$, $(0, 1)$ und $(1, 1)$ des Definitionsbereiches.

Über die Hauptkrümmungen k_1 und k_2 lassen sich die Gaußsche und die mittlere Krümmung definieren. So wird die Gaußsche Krümmung K durch

$$K = k_1 k_2$$

und die mittlere Krümmung H durch

$$H = \frac{1}{2}(k_1 + k_2)$$

definiert.

Oft liefert MAPLE für die Hauptkrümmungen selbst nach Anwendung von `simplify` noch recht umfangreiche Ausdrücke. Die Größen H und K lassen sich aber auch noch anders berechnen. Es gilt nämlich $K(u,v) = \det L_{(u,v)}$ und $H(u,v) = \frac{1}{2}\operatorname{spur} L_{(u,v)}$. Wir können also K in MAPLE auch mit dem Befehl `det(`*matrix*`)` bei Benutzung des `linalg`-Pakets bzw. `Determinant(`*Matrix*`)` bei Benutzung des `LinearAlgebra`-Pakets aus der Matrix der Weingartenabbildung berechnen. Analog steht für die Spur einer Matrix der Befehl `trace(`*matrix*`)` bzw. `Trace(`*Matrix*`)` zur Verfügung. Probieren Sie die Befehle aus und vergleichen Sie sie mit den Ergebnissen von oben.

Aufgabe 6.2.2 Eine andere Möglichkeit ergibt sich aus den Berechnungen der Weingartenabbildung aus dem letzten Abschnitt: Die Größen K und H lassen sich auch direkt aus den Matrizen der ersten und zweiten Fundamentalform herleiten. Rechnen Sie durch Benutzung von Gleichung (6.1) mit MAPLE nach, dass folgende Formeln gelten:

$$K = \frac{ln - m^2}{EG - F^2}$$

und

$$H = \frac{lG - 2mF + nE}{2(EG - F^2)}$$

Hinweis: Hier geht es nur um Lineare Algebra, die tatsächliche Bedeutung von E, F, G, l, m und n spielt keine Rolle.

Aufgabe 6.2.3 Definieren Sie die Größen K und H für eine beliebige Fläche in MAPLE.

Aufgabe 6.2.4 Berechnen Sie die Gaußsche und die mittlere Krümmung des Affensattels. Stellen Sie die beiden Größen als Funktionen über dem Definitionsbereich der Fläche dar. Was fällt Ihnen an der Gaußschen Krümmung auf?

Aufgabe 6.2.5 Leiten Sie mit MAPLE allgemeine Formeln für die Gaußsche und die mittlere Krümmung eines Graphen einer Funktion und einer Rotationsfläche her.

6.3 Minimalflächen

Historisch entstand der Begriff der Minimalfläche aus der Frage, wie eine Fläche in eine vorgegebene Randlinie eingespannt werden muss, damit ihr Flächeninhalt minimal wird. Es zeigt sich, dass dazu notwendigerweise die mittlere Krümmung der Fläche verschwinden muss. Aus diesem Grund werden Flächen mit verschwindender mittlerer Krümmung als Minimalflächen bezeichnet. Es gibt Programme, die zu vorgegebenen Randkurven durch Näherungsverfahren die zugehörigen Minimalflächen berechnen. Es würde jedoch den Rahmen dieses Praktikums sprengen, diese Programme näher zu behandeln. Daher sollen in diesem Abschnitt lediglich ein paar spezielle Minimalflächen näher betrachtet werden.

Aufgabe 6.3.1 Die Enneperfläche ist gegeben durch die Gleichung

$$X(u,v) = \left(u - \frac{u^3}{3} + uv^2, v - \frac{v^3}{3} + u^2v, u^2 - v^2\right) .$$

Rechnen Sie mit MAPLE nach, dass die mittlere Krümmung dieser Fläche verschwindet. Zeichnen Sie die Fläche mit MAPLE.

Aufgabe 6.3.2 Die Scherksche Minimalfläche wird durch die Gleichung

$$X(u,v) = \left(u, v, \ln \frac{\cos v}{\cos u}\right)$$

definiert. Auf welcher Menge kann diese Fläche definiert werden? Welche Symmetrien besitzt sie? Rechnen Sie auch bei dieser Fläche mit MAPLE nach, dass die mittlere Krümmung verschwindet und zeichnen Sie die Fläche. Wenn Sie wollen, können Sie auch mehrere Zusammenhangskomponenten dieser Fläche darstellen.

Ein weiterer altbekannter Vertreter einer Minimalfläche ist das Helikoid

$$X(u,v) = (v \sin u, v \cos u, u) .$$

Auch hier können Sie mit MAPLE leicht nachrechnen, dass die mittlere Krümmung verschwindet. Eine mit dem Helikoid verwandte Minimalfläche ist das Katenoid, das als Rotationsfläche durch die folgende Gleichung definiert ist:

$$X(u,v) = (\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) .$$

Wie sich ein Zylinder auf eine Ebene abrollen lässt, kann man auch ein Katenoid in ein Helikoid verformen. Der Grund dafür ist dieselbe innere Geometrie der beiden Flächen. Sie können sich in der folgenden Aufgabe davon überzeugen:

Aufgabe 6.3.3 Betrachten Sie die erste Fundamentalform des Helikoids. Verknüpfen Sie die Darstellung des Helikoids nun mit folgender Transformation des Parameterbereichs:

$$(u, v) \mapsto (u, \sinh v)$$

und berechnen Sie erneut die erste Fundamentalform des Helikoids bezüglich dieser Parametrisierung. Berechnen Sie nun zum Vergleich die erste Fundamentalform des Katenoids. Wie Sie sehen, sind die beiden Flächen lokal isometrisch.

Wir wollen nun die Deformation des Helikoids in ein Katenoid graphisch veranschaulichen. Dazu betrachten wir folgende Familie von Flächen:

$$X_t(u, v) = \cos t(\sinh v \sin u, -\sinh v \cos u, u) + \sin t(\cosh v \cos u, \cosh v \sin u, v) \ .$$

Aufgabe 6.3.4 Rechnen Sie mit MAPLE nach, dass diese Flächen für alle t Minimalflächen sind und dass die erste Fundamentalform jeweils von t unabhängig ist. Die Flächen sind also lokal isometrisch. Wie man sieht, ist die Fläche X_0 das Helikoid und die Fläche $X_{\frac{\pi}{2}}$ das Katenoid. Berechnen Sie mit dem MAPLE-Befehl `animate3d(..)` einen Film, der die Deformation graphisch darstellt.