Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 10 11. 07. 2011

---

1. Betrachten Sie die Funktion $f : \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\} \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2 - y^2, 2xy)$. Bestimmen Sie auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x < 0\}$ eine Umkehrfunktion von f.

   Bemerkung: Identifiziert man (x,y) mit $x + iy = z$, so ist $f(z) = z^2$ und die Umkehrfunktion wird durch einen Zweig der Wurzelfunktion beschrieben.

2. Das *Kreuzprodukt* zweier Vektoren $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ des $\mathbb{R}^3$ wird definiert durch

$$x \times y = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}.$$

   Zeigen Sie folgende (charakterisierende) Eigenschaften des Kreuzproduktes:

   (a) Sind x und y linear abhängig, so gilt $x \times y = 0$.

   (b) Sind x und y linear unabhängig, so gilt:

      i. $x \times y$ steht senkrecht auf x und y.

      ii. $\|x \times y\| = \|x\| \cdot \|y\| \cdot \sin\sphericalangle(x,y)$.
      Hinweis: Benützen Sie, dass $\sin^2 + \cos^2 = 1$ und $\cos\sphericalangle(x,y) = \frac{x \cdot y}{\|x\|\|y\|}$ gilt.

      iii. $\det((x\,y\,x \times y)) > 0$, wobei $(x\,y\,x \times y)$ die Matrix mit den Spalten x, y und $x \times y$ bezeichnet.

   Das heißt, dass $x \times y$ der eindeutig bestimmte Vektor ist, der senkrecht auf der xy-Ebene steht, dessen Länge der Flächeninhalt des von x und y aufgespannten Parallelogramms ist und sodass $(x, y, x \times y)$ ein Rechtssystem ist.

3. *(2 Punkte)* Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ eine Funktion und $V \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie:

   (a) $\mathrm{rot}(\mathrm{rot}\, V) = \mathrm{grad}(\mathrm{div}\, V) - \Delta V$, wobei $(\Delta V = (\Delta V_1, \Delta V_2, \Delta V_3)\,)$

   (b) $\mathrm{rot}(fV) = (\mathrm{grad}\, f) \times V + f\,\mathrm{rot}\, V$, wobei $\times$ das Kreuzprodukt aus Aufgabe 2 bezeichnet.

4. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$,

$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5} \\ -\frac{3xy}{r^5} \\ -\frac{3xz}{r^5} \end{pmatrix},$$

   wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

   Berechnen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{J}_V$, die Divergenz $\mathrm{div}(V)$ und die Rotation $\mathrm{rot}(V)$.

5. *(2 Punkte)* Fließt durch einen in der z-Achse verlaufenden Leiter ein konstanter Strom, so erzeugt dieser nach dem Biot-Savartschen Gesetz ein Magnetfeld außerhalb des Drahtes, das bis auf einen konstanten Faktor gegeben ist durch

$$\mathbf{H}(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\mathbf{H}$ längs der Kurve $\gamma_r : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$, $t \mapsto \begin{pmatrix} r \cos t \\ r \sin t \\ 0 \end{pmatrix}$

für alle $r > 0$.

Abgabe: Montag, 18. 07. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 10 — 11. 07. 2011

1. Seien $D \subseteq \mathbb{R}^3$ offen, $f \in C^1(D, \mathbb{R})$ eine Funktion und $V \in C^2(D, \mathbb{R}^3)$ ein Vektorfeld. Zeigen Sie:
   (a) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} V) = 0$,
   (b) $\operatorname{div}(fV) = (\operatorname{grad} f) \cdot V + f \operatorname{div} V$.

2. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2xy \\ 3z^3 + x^2 \\ 9yz^2 \end{pmatrix}$.

   Berechnen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{J}_V$, die Divergenz $\operatorname{div}(V)$ und die Rotation $\operatorname{rot}(V)$.

3. *Drehung.* Die Drehung des Vektors x mit konstanter Winkelgeschwindigkeit ω um eine Achse mit Richtungsvektor a, $\|a\| = 1$, im $\mathbb{R}^3$ wird beschrieben durch die Abbildung $L_x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ $t \mapsto \cos(\omega t)x + (1 - \cos(\omega t))(x \cdot a)a + \sin(\omega t)a \times x$, wobei

$$a \times x = \begin{pmatrix} a_2x_3 - a_3x_2 \\ a_3x_1 - a_1x_3 \\ a_1x_2 - a_2x_1 \end{pmatrix}.$$

   (a) Berechnen Sie das Vektorfeld $V(x) = \frac{d}{dt}|_{t=0} L_x(t)$.
   (b) Bestimmen Sie die Rotation $\operatorname{rot} V$.