Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 11 — 18. 07. 2011

1. Für $(x,y) \neq (0,0)$ bezeichne $\varphi(x,y) \in [0,2\pi[$ den orientierten Winkel zwischen $(1,0)$ und (x,y), d.h. $\varphi = \varphi(x,y) \in [0,2\pi[$ ist definiert durch

$$(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\varphi, \sin\varphi).$$

Diese Funktion kann folgendermaßen explizit angegeben werden:

Auf der Menge $\{(x,y) \mid (x,y) \neq 0 \text{ und } y \geq 0\}$ gilt $\varphi(x,y) = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Auf der Menge $\{(x,y) \mid (x,y) \neq 0 \text{ und } x \leq 0\}$ gilt $\varphi(x,y) = \pi - \arcsin \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Auf der Menge $\{(x,y) \mid (x,y) \neq 0 \text{ und } y < 0\}$ gilt $\varphi(x,y) = 2\pi - \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$.

Hinweis: Beachten Sie, dass $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$ und $\arcsin : [-1,1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

(a) Überlegen Sie sich, dass obige explizite Darstellung von φ plausibel ist. Berechnen Sie dazu die Werte von φ an den Punkten $(1,0)$, $(1,1)$, $(0,1$, $(-1,1)$, $(-1,0)$, $(-1,-1)$, $(0,-1)$ und $(1,-1)$ jeweils für alle (möglichen) Darstellungen.

(b) Berechnen Sie $\operatorname{grad}\varphi$ auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,0) \mid x \geq 0\}$ und überlegen Sie sich, dass $\operatorname{grad}\varphi$ ein C^∞-Vektorfeld auf ganz $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ darstellt.

(c) Berechnen Sie das Kurvenintegral von $\operatorname{grad}\varphi$ längs der Kurve $c : [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$.

2. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy+x \\ e^z \end{pmatrix}$ und die Kurven

$$\overline{c} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{cases} (2t,0,0) & , \quad \text{falls } t \leq \frac{1}{2} \\ (1, 2(t-\frac{1}{2}), 0) & , \quad \text{falls } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\overline{\overline{c}} : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{cases} (0,2t,0) & , \quad \text{falls } t \leq \frac{1}{2} \\ (2(t-\frac{1}{2}), 1, 0) & , \quad \text{falls } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

und

$$c(t) : [0,1] \to \mathbb{R}^3, \quad t \mapsto \begin{cases} \overline{c}(2t) & , \quad \text{falls } t \leq \frac{1}{2} \\ \overline{\overline{c}}(2-2t) & , \quad \text{falls } t > \frac{1}{2} \end{cases}$$

Desweiteren bezeichnen $\overline{c}_r(t) := r \cdot \overline{c}(t)$, $\overline{\overline{c}}_r(t) := r \cdot \overline{\overline{c}}(t)$ und $c_r(t) := r \cdot c(t)$ die mit dem Faktor r gestreckten Kurven.

(a) Fertigen Sie eine Skizze für die Kurven $c = c_1$ und c_2 an.

(b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von V längs der Kurven $\overline{c}_r$ und $\overline{\overline{c}}_r$.

(c) Berechnen Sie $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{c_r} V$.

(d) Berechnen Sie $\operatorname{rot} V$. Vergleichen Sie $\operatorname{rot} V(0,0,0)$ mit $\lim_{r\to 0} \frac{1}{r^2} \int_{c_r} V$.

3. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $V(x,y,z) = \ln(1+r^2) \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$, wobei $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$.

   (a) Berechnen Sie $\operatorname{rot} V$. Besitzt V ein Potential?

   (b) Berechnen Sie $U(x,y,z) = \int_c V$ für die Verbindungsstrecke c von $(0,0,0)$ nach (x,y,z).

4. Für welche Werte a, b, c, α, β, γ besitzt das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{x+y+z=0\} \to \mathbb{R}^3$ ein Potential U?

$$V(x,y,z) = \frac{1}{(x+y+z)^3} \begin{pmatrix} x+y-3z \\ ax+by+cz \\ \alpha x+\beta y+\gamma z \end{pmatrix}.$$

   Hinweis: Benützen Sie Anwesenheitsaufgabe 3, um zu zeigen, dass die Mengen $\{(x,y,z) \mid x+y+z<0\}$ und $\{(x,y,z) \mid x+y+z>0\}$ einfach zusammenhängend sind.

Abgabe: Montag, 25. 07. vor der Vorlesung

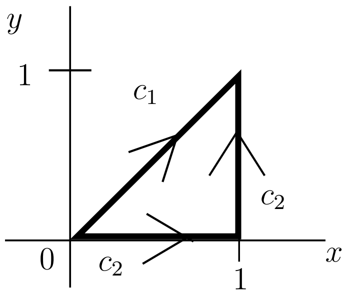
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 11 18. 07. 2011

---

1. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 \\ xy \end{pmatrix}$. Berechnen Sie die Kurvenintegrale längs der Kurven c_1 und c_2 (vgl. Bild).



2. Für welche Werte von a besitzt $V : \mathbb{R}^3 \setminus \{(x,y,z) \mid x = y \text{ oder } x = -y\} \to \mathbb{R}^3$ ein Potential?
$$V(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{ay}{(x^2-y^2)} \\ \frac{2x}{(x^2-y^2)} + 1 \\ z \end{pmatrix}.$$
Hinweis: Benützen Sie Anwesenheitsaufgabe 3, um zu zeigen, dass die Mengen $\{(x,y,z) \mid -y < x < y\}$, $\{(x,y,z) \mid -y > x > y\}$, $\{(x,y,z) \mid -x < y < x\}$ und $\{(x,y,z) \mid -x > y > x\}$ einfach zusammenhängend sind.

3. Sei $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}^2$ konvex, das heißt, dass zu je zwei Punkten x, $y \in D$ auch das Geradensegment zwischen x und y in D liegt.

   Zeigen Sie: D ist einfach zusammenhängend.