

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 12

25. 07. 2011

1. Integration

(a) Es sei $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < 1\}$. Bestimmen Sie (Polarkoordinaten):

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy = \lim_{r \rightarrow 1^-} \int_{B_r} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dx dy,$$

wobei $B_r = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 < r^2\}$ bezeichnet.

(b) Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$, wobei $a > 0$ und $ac - b^2 > 0$ gilt. Berechnen Sie:

$$\int_{\{(x,y) \mid f(x,y) < 1\}} \frac{1}{\sqrt{1-f(x,y)}} dx dy.$$

Hinweis: Führen Sie das Integral durch eine lineare Transformation auf den Fall a) zurück.

2. Das Trägheitsmoment eines ebenen Bereiches B bezüglich einer Achse ist

$$I_p = \int_B \delta^2(x, y) dx dy,$$

wobei $\delta^2(x, y)$ das Abstandskadrat des Punktes (x, y) von der Achse bezeichnet. Berechnen Sie die Trägheitsmomente für die Bereiche

(a) Ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1$ bezüglich der x -Achse,

(b) Quadrat $[-1, 1]^2$ bezüglich der Achse $\{(t, t) \mid t \in \mathbb{R}\}$.

3. Zeigen Sie, dass gilt

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2 < n\}} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dx dy = 2\pi.$$

Hinweis: Transformation auf Polarkoordinaten

4. Sei B ein ebener Bereich, der von einer Kurve c berandet wird, wobei die Parametrisierung der Kurve so gewählt sei, dass der Bereich B links von der Kurve c liegt. Und seien $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 2-mal stetig differenzierbar. Zeigen Sie:

(a) $\int_c (f \cdot \text{grad}(f)) \cdot dx = 0$,

(b) $\int_B (f \Delta g + \text{grad } f \cdot \text{grad } g) dudv = \int_c f V_g \cdot dx$, wobei $V_g(u, v) = \begin{pmatrix} -\frac{\partial g}{\partial v}(u, v) \\ \frac{\partial g}{\partial u}(u, v) \end{pmatrix}$

Abgabe: Montag, 01. 08. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

**Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für
Studierende des Ingenieurwesens“**

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 12

25. 07. 2011

1. *Integration* Skizzieren Sie die Menge $A = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 1, y \leq x \leq y^2 + 1\}$ und stellen Sie sie als Normalbereich vom Typ I und II dar. Berechnen Sie folgendes Integral auf zwei Weisen:

$$\int_A x^2 y \, dx dy.$$

2. Bezeichne c die Randkurve des Einheitskreises B , wobei die Parametrisierung so gewählt sei, dass der Kreis links der Kurve liegt. Berechnen Sie folgendes Integral direkt und mit Hilfe des Greenschen Satzes:

$$\int_c g \cdot dx,$$

für $g(u, v) = \begin{pmatrix} -u^2 v \\ (1 - v^2)u \end{pmatrix}.$