Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 13 — 01. 08. 2011

---

1. *Satz von Gauß (4 Zusatzpunkte):* Betrachten Sie den Kreiskegel

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} st\cos\varphi \\ st\sin\varphi \\ sb(1-\frac{t}{a}) \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le s \le 1,\, 0 \le t \le a,\, 0 \le \varphi \le 2\pi \right\}$$

mit Spitze $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ b \end{pmatrix}$ und Grundfläche $\left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix} \middle| \, x^2+y^2 \le a^2 \right\}$

und das Vektorfeld $V(x,y,z) = \begin{pmatrix} xz \\ xy \\ -z \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie für die folgende Parametrisierung der Kegeloberfläche (ohne Grundfläche) die ersten partiellen Ableitungen und an jedem Punkt deren Kreuzprodukt:

$$(t,\varphi) \in]0,a[\times]0,2\pi[\mapsto f(t,\varphi) = \begin{pmatrix} t\cos\varphi \\ t\sin\varphi \\ b(1-\frac{t}{a}) \end{pmatrix}.$$

(b) Berechnen Sie

$$\int_S \operatorname{div} V \, dx\, dy\, dz.$$

(c) Berechnen Sie

$$\int_{\partial S} V \cdot d\vec{O}.$$

2. *(4 Zusatzpunkte)* Betrachten Sie die obere Halbsphäre $S = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 = 1,\, z \ge 0\}$ vom Radius 1 mit Mittelpunkt 0.

(a) Geben Sie eine Parametrisierung von S an.

(b) Berechnen Sie den Flächeninhalt $O(S)$.

(c) Berechnen Sie das axiale Trägheitsmoment $I_z = \frac{1}{O(S)} \int_S (x^2+y^2)dO$ bezüglich der z-Achse.

3. *(4 Zusatzpunkte)* Betrachten Sie das Tetraeder

$$T := \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 \le x, 0 \le y, 0 \le z, x+y+z \le 1\}.$$

(a) Berechnen Sie das Volumen $V = \int_T 1 \, dx\, dy\, dz$.

(b) Berechnen Sie den Schwerpunkt $(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z})$, wobei $\overline{x} = \frac{1}{V}\int_T x\,dx\,dy\,dz$, $\overline{y} = \frac{1}{V}\int_T y\,dx\,dy\,dz$ und $\overline{z} = \frac{1}{V}\int_T z\,dx\,dy\,dz$.

(c) Berechnen Sie das Trägheitsmoment (bzgl. der z-Achse) $I_z = \int_T (x^2+y^2)\,dx\,dy\,dz$.

4. *(4 Zusatzpunkte)* Die Kugelschale $H = \{(y_1,y_2,y_3) \in \mathbb{R}^3 \mid r_1 \leq \|(y_1,y_2,y_3)\| \leq r_2\}$, $0 < r_1 < r_2$, ist elektrisch homogen geladen. Für das Potential im Raumpunkt (x_1,x_2,x_3) gilt dann

$$\Phi(x_1,x_2,x_3) = \int_H \frac{1}{\|(x_1,x_2,x_3)-(y_1,y_2,y_3)\|} dy_1 dy_2 dy_3 + C.$$

Bemerkung: Für $(x_1,x_2,x_3) \in H$ ist der Integrand unbeschränkt, das heißt es handelt sich um ein (konvergentes) uneigentliches Integral. Die üblichen Rechenregeln gelten auch für diesen Fall.

(a) Mit $r = \|(x_1,x_2,x_3)\|$, $\rho = \|(y_1,y_2,y_3)\|$ und Übergang zu Kugelkoordinaten zeige man, dass $\Phi(x_1,x_2,x_3) = \tilde{\Phi}(r)$ mit

$$\tilde{\Phi}(r) = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}\int_{r_1}^{r_2} \frac{\rho^2 \sin\psi}{\sqrt{\rho^2+r^2-2r\rho\cos\psi}} d\rho d\varphi d\psi + C.$$

(b) Berechnen Sie $\tilde{\Phi}(r)$ und skizzieren Sie den Graphen von $\tilde{\Phi}(r)$ für den Fall $r_1 = 2$ und $r_2 = 4$.

Abgabe: Legen Sie Ihre Lösung bis Montag, 08. 08., 14h in das Fach von Nena Röttgen im 3. Stock der Eckerstr. 1

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt