

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 02

09. 05. 2011

1. Nach Anwesenheitsaufgabe 1 vom letzten Blatt gilt für die Matrizen $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$, dass $D := B^{-1}AB = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. Finden Sie eine Formel für die Matrixpotenz A^k , definiert durch $A^k := A \cdot \dots \cdot A$ (k mal), für alle $k \geq 1$. Dazu berechnen Sie zunächst B^{-1} , und nutzen dann, dass A durch B , B^{-1} und D ausgedrückt werden kann, wobei D Diagonalgestalt hat. Geben Sie mit Hilfe dieser Formel die Matrix A^8 explizit an.
2. Eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ heißt instabil, falls ein Vektor $v \in \mathbb{R}^n$ existiert, so dass $\lim_{k \rightarrow \infty} \|A^k v\| = \infty$.
- (a) Zeigen Sie: Besitzt eine Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ einen Eigenwert $\lambda \in \mathbb{R}$ mit $|\lambda| > 1$, so ist A instabil.
- (b) Es existieren instabile Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, deren Eigenwerte alle vom Betrag kleiner gleich 1 sind. Zeigen Sie, dass $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ein solches Beispiel ist.

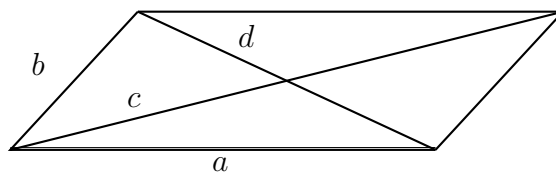
3. Sei U der von den Vektoren $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ erzeugte Untervektorraum des \mathbb{R}^5 , das heißt $U = \{\alpha v + \beta w \mid \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

- (a) Bestimmen Sie eine Orthonormalbasis von U .

- (b) Berechnen Sie den Abstand von $x = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ -9 \\ 2 \end{pmatrix}$ zu U .

4. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.
- (b) Zeigen Sie, dass in einem Parallelotop die Summe der Quadrate der Diagonalen gleich dem Doppelten der Summe der Quadrate der Seitenlängen ist, d.h.

$$c^2 + d^2 = 2(a^2 + b^2).$$



Abgabe: Montag, 16. 05. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

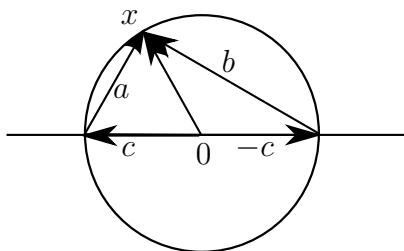
**Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für
Studierende des Ingenieurwesens“**

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 02

09. 05. 2011

1. (a) Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^n$ gilt: $x \cdot y = \frac{1}{4}(\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2)$
(b) Ist $A : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ linear und gilt $\|Ax\| = \|x\|$ für alle $x \in \mathbb{R}^n$, so ist A orthogonal.
(c) *Satz des Thales*. Es gelte $\|c\| = \|x\|$. Zeigen Sie, dass die Vektoren a und b aufeinander senkrecht stehen.



2. Sei $x = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ ein Punkt und $G = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda \\ \lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \mid \lambda \in \mathbb{R} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3$ ein Untervektorraum.
Berechnen Sie den Abstand von x zu G , das heißt berechnen Sie $\min\{\|x - y\| \mid y \in G\}$.