Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 03 16. 05. 2011

1. *Orthogonale Matrizen*

   (a) Welche der folgenden Matrizen beschreiben Drehungen des $\mathbb{R}^2$:
   $$A := \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \quad B := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad C := \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie für die Drehmatrix/matrizen den Drehwinkel.

   (b) Welche der folgenden Matrizen beschreiben Drehungen des $\mathbb{R}^3$:
   $$D := \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 1 & -4 \end{pmatrix}, \quad E := \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$$
   Bestimmen Sie für die Drehmatrix/matrizen die Drehachse und den Betrag des Drehwinkels.

2. Betrachten Sie den Vektorraum $V_{(3)}$ der Polynome vom Grad höchstens 3, d.h. $V_{(3)} = \{a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_3\,, a_2\,, a_1\,, a_0 \in \mathbb{R}\}$ mit dem Skalarprodukt
   $$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\cdot g(x)dx.$$
   Die Menge $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ ist eine Basis von $V_{(3)}$.

   (a) Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis aus der Basis $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$.

   (b) $V_{(3)}$ ist ein Untervektorraum von
   $$V_{(7)} = \{a_7x^7 + a_6x^6 + a_5x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 \mid a_7\,, a_6\, a_5\,, a_4\,, a_3\,, a_2\,, a_1\,, a_0\, \in \mathbb{R}\}.$$
   Bestimmen Sie die Orthogonalprojektion von $f(x) = 4x^7 \in V_{(7)}$ auf $V_{(3)}$.

3. Sei $f(x) = 4x^5 + 2x^4 - x^3 + 2x^2 + 6$.

   Stellen Sie f in der Form $f(x) = a_5(x-1)^5 + a_4(x-1)^4 + a_3(x-1)^3 + a_2(x-1)^2 + a_1(x-1) + a_0$ dar.

   Tipp: Verfahren Sie wie in Anwesenheitsaufgabe 3.

4. Betrachten Sie die Differentialgleichung $(x^2-1)f''(x) = 6f(x)$. Bestimmen Sie mittels Potenzreihenansatz $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und Koeffizientenvergleich eine Rekursionsformel für die Koeffizienten a_n, $n \geq 2$, mit Anfangswerten $a_0 = f(0)$ und $a_1 = f'(0)$.

   Für welche Werte von a_0 und a_1 ist f ein Polynom?

Abgabe: Montag, 23. 05. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 03 16. 05. 2011

---

1. Betrachten Sie den Vektorraum $V_{(2)}$ der Polynome vom Grad höchstens 2, d.h. $V_{(2)} = \{a_2x^2 + a_1x + a_0 \,|, a_2\,, a_1\,, a_0 \in \mathbb{R}\}$ mit dem Skalarprodukt

$$\langle f, g\rangle := \int_{-1}^{1} f(x) \cdot g(x)dx.$$

   Die Menge $\{1,\, x,\, x^2\}$ ist eine Basis von $V_{(2)}$.

   Bestimmen Sie mit dem Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahren eine Orthonormalbasis aus der Basis $\{1,\, x,\, x^2\}$.

2. Geben Sie die Matrix an, die eine Spiegelung an der Winkelhalbierenden zwischen x- und y-Achse beschreibt.

3. Bestimmen Sie die Taylorreihe von $f(x) = 3x^2 - x$ an der Stelle -1.