Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 04 — 23. 05. 2011

---

1. Zeigen Sie, dass gilt:
$$\cos t + i \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}.$$

   Bemerkung: Dies erklärt die Definition $e^{it} := \cos t + i \sin t$ aus Kapitel 2.3.

   Hinweis: Zerlegen Sie die Potenzreihe in Real- und Imaginärteil.

2. *Die "Zackenfunktion":* Betrachten Sie die Funktion $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$,
$$f(t) = \begin{cases} -\frac{\pi}{2} + t & \text{für } 0 \le t \le \pi \\ -\frac{\pi}{2} - t & \text{für } -\pi \le t \le 0 \end{cases}$$

   (a) Berechnen Sie die Fourierreihe von f und bestimmen Sie explizit F_f^5 und F_f^{10}.

   (b) Erstellen Sie eine Computerzeichnung für f, F_f^5, F_f^{10} und F_f^{20} auf dem Intervall $[-\pi, \pi]$.

3. *Die Taylorreihe I:* Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(t) = \sin(t) + \arctan(t)$.

   (a) Bestimmen Sie die Taylorreihe der Funktion f am Entwicklungspunkt $a = 0$ und geben Sie T_f^5 explizit an.

   (b) Erstellen Sie eine Computerzeichnung der Graphen von f, T_f^5, T_f^{10} und T_f^{20} auf dem Intervall $[-4, 4]$.

4. *Die Taylorreihe II:* Die Taylorentwicklung $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ erlaubt es, $\sqrt{e} = e^{\frac{1}{2}}$ durch die Zahlenfolge
$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^k$$
   zu approximieren. Bestimmen Sie ein n, so dass $|a_n - \sqrt{e}| \le 10^{-9}$ gilt.

   Anleitung: Schätzen Sie das Restglied
$$R^n(x) = e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$
   für $x = \frac{1}{2}$ ab. Sie können verwenden, dass für $0 \le \xi \le \frac{1}{2}$ gilt: $0 < e^{\xi} < 2$.

Abgabe: Montag, 30. 05. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 04 — 23. 05. 2011

1. *Die "Rechteckschwingung":* Betrachten Sie die Funktion $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$,

$$f(t) = \begin{cases} +1 & \text{für } 0 \leq t \leq \pi \\ -1 & \text{für } \pi < t \leq 2\pi \end{cases}$$

   Berechnen Sie die Fourierreihe von f und geben Sie F_f^5 explizit an.

2. Betrachten Sie die Kurve $c(t) = (4\cos(t), \sqrt{2}\sin(2t))$.

   (a) Skizzieren Sie c.

   (b) Bestimmen Sie die Tangentialvektoren $\|\dot{c}(t)\|$ an jeder Stelle $t \in \mathbb{R}$.

   (c) Was ist die Periode von c, d.h. was ist die kleinste reelle Zahl $k > 0$, so dass $c(t+k) = c(t)$ gilt?

   (d) Berechnen Sie die Bogenlänge der Kurve c auf dem Intervall $[0, k]$.

3. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = x^2 - y$. Zeichnen Sie den Graphen von f und markieren Sie darin die Graphen der Abbildungen $x \mapsto f(x, 0)$, $x \mapsto f(x, 1)$ und $x \mapsto f(x, 2)$.