Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“
im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 05 30. 05. 2011

1. *Hauptachsentransformation*

   (a) Bestimmen Sie die Eigenwerte λ, μ der symmetrischen Matrix $A = \begin{pmatrix} 5 & -\sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ und normierte Eigenvektoren v, w zu den Eigenwerten λ und μ.

   (b) Bestimmen Sie die Drehmatrix $B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$, für die $B^T AB = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} =: D$ gilt. Wie groß ist der Drehwinkel von B?
   Hinweis: B hat die Spaltenvektoren v und $\pm w$.

   (c) Zu A beziehungsweise D gehören die quadratischen Formen

   $$f(x,y) = 5x^2 - 2\sqrt{3}xy + 7y^2 = (x,y)\, A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   beziehungsweise

   $$g(x,y) = \lambda x^2 + \mu y^2 = (x,y)\, D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

   Zeichnen Sie (eventuell mit einem Computerprogramm) die Niveaumengen (Ellipsen!)

   $$N_{32}^f = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, f(x,y) = 32 \right\}$$

   und

   $$N_{32}^g = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, g(x,y) = 32 \right\}$$

   Begründen Sie, dass B die Menge N_{32}^g auf N_{32}^f abbildet.
   ($B^T = B^{-1}$ dreht die Ellipse N_{32}^f so, dass deren Hauptachsen auf die Koordinatenachsen zu liegen kommen, dies ist der Ursprung des Namens “Hauptachsentransformation”)

2. (a) Seien $A : [a,b] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$ und $B : [a,b] \to \mathbb{R}^{3\times 3}$. Zeigen Sie, dass gilt:

   $$(AB)'(t) = A'(t)B(t) + A(t)B'(t).$$

   (b) Die Menge der orthogonalen 3×3- Matrizen wird mit $O(3) = \{A \in \mathbb{R}^{3\times 3} \mid A^T A = E_3\}$ bezeichnet. Zeigen Sie: Ist $A : \mathbb{R} \to O(3)$ eine Kurve mit $A(0) = E_3$, so gilt $A'(0)^T = -A'(0)$.

3. *Bogenlänge*

   (a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie für die Schraubenlinie $c(t) = (a\cos t, a\sin t, bt)$ die Bogenlänge auf dem Intervall $[0, 2\pi]$.

   (b) Bestimmen Sie die Bogenlänge des Graphen der Funktion $t \mapsto \cosh t$ auf dem Intervall $[0, \ln(5)]$.

4. *Stetigkeit* Betrachten Sie die Funktion $f(x,y) := \begin{cases} \frac{3x^2y^4}{x^4+y^8}, & \text{falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{falls } (x,y) = (0,0) \end{cases}$.

   (a) Zeigen Sie, $t \mapsto f(0,t)$ und $t \mapsto f(t, \alpha t)$ sind für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ stetig.

   (b) Zeigen Sie, dass f an der Stelle 0 nicht stetig ist.
   Hinweis: Betrachten Sie f auf der Parabel $x = y^2$.

Abgabe: Montag, 06. 06. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 05 30. 05. 2011

---

1. Berechnen Sie die Ableitung der Kurve $A : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{3\times 3}$, $t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t & -\sin t & 0 \\ \sin t & \cos t & 0 \\ 0 & 0 & 1+t \end{pmatrix}$.

2. Die allgemeine Gasgleichung beschreibt den Zusammenhang von Druck p, Volumen V, Stoffmenge n und Temperatur T für ein ideales Gas:

$$p \cdot V = n \cdot R \cdot T,$$

wobei $R \simeq 8(\frac{J}{K \cdot mol})$ die universelle Gaskonstante bezeichnet. Bei einem idealen Gas lässt sich somit der Druck p aus Volumen V, Stoffmenge n und Temperatur T durch die Funktion $p(V, n, T) = \frac{n \cdot R \cdot T}{V}$ berechnen. Stellen Sie analog dazu die Funktionen für Volumen V, Stoffmenge n und Temperatur T auf. Geben Sie dann die partiellen Funkionen von p zu den Werten $n = 1(mol)$, $T = 293(K)$ und $V = 1(l)$ an. Zeichnen Sie für diese Funktionen die Graphen. Überlegen Sie sich hierbei geeignete Skalierungen der Koordinatenachsen.

3. *Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisierungen*

   (a) Berechnen Sie die Bogenlänge folgender Kurven:

$$[-1, 1] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ \sqrt{1-t^2} \end{pmatrix},$$

$$[0, \pi] \to \mathbb{R}^2,\ t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}.$$

   (b)* Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}^n$ eine Kurve und $\varphi : [\tilde{a}, \tilde{b}] \to [a, b]$ eine stetig differenzierbare Funktion, so dass $\varphi(\tilde{a}) = a$, $\varphi(\tilde{b}) = b$ und für alle $t \in [\tilde{a}, \tilde{b}]$ gilt: $\varphi'(t) > 0$. Betrachten Sie die Verkettung $\tilde{f} = f \circ \varphi$.

   Zeigen Sie, dass die Bogenlänge von f und $\tilde{f}$ gleich ist, das heißt $L(f) = L(\tilde{f})$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Substitutionsregel.