Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 06 06. 06. 2011

---

1. *(2 Punkte)* Betrachten Sie die Funktionen $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x_1, x_2) = \frac{1}{2}x_1 x_2$.

   (a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion g.

   (b) Zeichnen Sie die Niveaumengen $g^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid g(x) = c\}$ für die Werte $c = -\frac{1}{2}$, 0, 1 und zeichnen Sie das Vektorfeld $\operatorname{grad} g$ entlang der Niveaumengen.

2. *(2 Punkte)* Seien f, $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie:

   (a) $\operatorname{grad}(f \cdot g) = f\,(\operatorname{grad} g) + (\operatorname{grad} f)\, g$,

   (b) $\Delta(f \cdot g) = f(\Delta g) + 2(\operatorname{grad} f)(\operatorname{grad} g) + (\Delta f)g$.

3. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$. Berechnen Sie für $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f, d.h. alle Ableitungen der Form $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für $i, j = 1, 2, 3$.

4. Sei $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten gegeben und sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine 2π-periodische Funktion, so dass $g(\varphi + \pi) = -g(\varphi)$ gilt. Betrachten Sie die Funkion $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = rg(\varphi)$.

   (a) Zeigen Sie, dass F genau dann an der Stelle $(0, 0)$ stetig ist, wenn g beschränkt ist, (d.h. es existiert ein $C > 0$, so dass $|g(t)| \leq C$ für alle $t \in \mathbb{R}$).

   (b) Bestimmen Sie für einen beliebigen Vektor $v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ die Richtungsableitung $\frac{\partial F}{\partial v}(0, 0)$ von F in Richtung v an der Stelle $(0, 0)$.

   (c) Zeigen Sie, dass F genau dann total differenzierbar ist, wenn die Vektoren $(\cos\varphi, \sin\varphi, g(\varphi))$ in einer Ebene durch $(0, 0, 0)$ liegen, die die z-Achse nicht enthält, d.h. es existieren $a, b \in \mathbb{R}$, so dass $a\cos\varphi + b\sin\varphi + g(\varphi) = 0$.

   Hinweis: Die Geraden $t(\cos\varphi, \sin\varphi, g(\varphi))$ liegen auf dem Graphen von F und somit auch in der Tangentialebene von F an der Stelle $(0, 0)$.

5. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 2x^3y - x^2y^3$, und $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = 3xy^3 + x^3y^2 - 5$. Bestimmen Sie eine näherungsweise Lösung (x_1, y_1) für das nichtlineare Gleichungssystem

$$f(x, y) = 0 \quad g(x, y) = 0.$$

   Wenden Sie dazu das Newtonverfahren (einmal) auf den Startwert $(x_0, y_0) = (1, 1)$ an.

Abgabe: Montag, 30. 06. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 06 — 06. 06. 2011

1. Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2)$.

   (a) Bestimmen Sie den Gradienten der Funktion f.

   (b) Zeichnen Sie die Niveaumengen $f^{-1}(c) = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = c\}$ für die Werte $c = 0$, $\frac{1}{2}$, 1 und veranschaulichen Sie sich das Vektorfeld $\operatorname{grad} f$ entlang der Niveaumengen.

2. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2) = x_1 \sin x_2 + x_2 e^{x_1}$. Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f, d.h. alle Ableitungen der Form $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ und $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ für $i, j = 1, 2$.

3. Sei $(x, y) = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2$ in Polarkoordinaten gegeben. Betrachten Sie die Funkion $F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r\sin\varphi$.

   Hinweis: Die Funktion F ist definiert, da sin eine 2π-periodische Funktion ist.

   (a) Zeichnen Sie den Graphen von F.

   (b) Für alle $v = (r\cos\varphi, r\sin\varphi) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ist $F(tv) = t\,r\sin\varphi$ (Überlegen Sie sich, dass diese Formel auch für $t < 0$ stimmt). Bestimmen Sie die Richtungsableitung $\frac{\partial F}{\partial v}(0,0)$ von F in Richtung v an der Stelle $(0,0)$.

   (c) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, eine 2π-periodische Funktion und $F(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = rg(\varphi)$. Welche Bedingung muss g zusätzlich erfüllen, damit alle Richtungsableitungen an der Stelle $(0,0)$ definiert sind?