Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“
im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 07 20. 06. 2011

1. *(2 Punkte)* Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $x \in D$ und $f \in C^3(D, \mathbb{R})$. Zeigen Sie:

$$\Delta f(x) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t^2} \left(\left(\sum_{i=1}^{n} f(x + te_i) + f(x - te_i) \right) - 2nf(x) \right).$$

   Hinweis: Benützen Sie die Formel aus Anwesenheitsaufgabe 1.

2. *(2 Punkte)* Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = -\frac{x}{2}^2 - \frac{y}{3}^2$. Zeichnen Sie ein Schaubild von f, in das folgende Objekte eingezeichnet sind:

   (a) Die Graphen der partiellen Funktionen $x \mapsto f(x, 1)$, $y \mapsto f(1, y)$ und deren Tangentialvektoren am Punkt $(1, 1, f(1, 1))$, d.h. $(1, 0, f_x(1, 1))$ und $(0, 1, f_y(1, 1))$.

   (b) Die Tangentialebene an graph(f) im Punkt $(1, 1, f(1, 1))$ und darin den Vektor $(v, \frac{\partial f}{\partial v}(1, 1))$ für $v = (1, 1)$.

3. Eine von Messdaten x_1 und x_2 abhängige Größe y werde mit Hilfe der Formel

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{\sin(x_1)}{x_2}$$

   berechnet, wobei die Werte $\overline{x}_1 = \frac{\pi}{2}$ mit einer (maximalen) Messungenauigkeit $\Delta x_1 = \pm 0,1$ und $\overline{x}_2 = 4$ mit einer (maximalen) Messungenauigkeit $\Delta x_2 = \pm 0,2$ gemessen wurden.

   (a) Berechnen Sie den Näherungswert $\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.

   (b) Bestimmen Sie die linearisierte Fehlerschätzung

$$(\Delta y)_{\text{lin}} := \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(\overline{x}_1, \overline{x}_2) \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

   (c) Finden Sie eine obere Schranke für die Maximalfehlerabschätzung

$$(\Delta y)_{\max} := \sum_{i=1}^{2} \left(\max_{(x_1, x_2) \in I} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, x_2) \right| \right) \cdot |\Delta x_i|,$$

   wobei $I = [\frac{\pi}{2} - 0,1; \frac{\pi}{2} + 0,1] \times [4 - 0,2; 4 + 0,2]$ das 2-dimensionale Unsicherheitsintervall bezeichnet.

   Bemerkung: Dieser Wert ist eine obere Schranke für den Fehler: $|\tilde{y} - y| \leq (\Delta y)_{\max}$ (Vgl. Aufgabenteil d)).

(d) *(2 Zusatzpunkte):* Zeigen Sie:

$$\max_{(x_1,x_2)\in I} |f(x_1,x_2) - f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)| \leq \sum_{i=1}^{2} \left(\max_{(x_1,x_2)\in I} \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1,x_2) \right| \right) \cdot |\Delta x_i|.$$

Folgern Sie daraus, dass $|\tilde{y} - y| \leq (\Delta y)_{\max}$.
Hinweis: Schreiben Sie $|f(x_1,x_2) - f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)| \leq |f(x_1,x_2) - f(\overline{x}_1,x_2)| + |f(\overline{x}_1,x_2) - f(\overline{x}_1,\overline{x}_2)|$ und wenden Sie dann auf jeden Summanden den Mittelwertsatz an (Überlegen Sie sich jeweils, welche partielle Funktion Sie betrachten müssen, um den Mittelwertsatz anzuwenden!).

4. *(6 Punkte)* Betrachten Sie die Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \ln\sqrt{x^2+y^2}$.

   (a) Berechnen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitugen.

   (b) Berechnen Sie Δf.

   (c) Bestimmen Sie den Gradienten $\operatorname{grad} f$ von f im Punkt $(2,1)$. Zeigen Sie dann, dass $\operatorname{grad} f$ senkrecht auf der Niveaufläche $N_f^{\ln(\sqrt{5})}$ liegt.

   (d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an den Graphen von f im Punkt $(2,1)$.

   (e) Bestimmen Sie einen Normalenvektor der Tangentialebene von f im Punkt $(2,1)$.

   (f) Bestimmen die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial v}$ im Punkt $(2,1)$ mit $v = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

5. *(2 Punkte)* Betrachten Sie die quadratische Form $f(x,y,z) = x^2 + 2xy - xz + 3yz - 2z^2$. Ist diese Form positiv definit, negativ definit oder indefinit?

   Hinweis: Nutzen Sie die Methode der Quadratischen Ergänzung.

Abgabe: Montag, 27. 06. vor der Vorlesung
Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 07 20. 06. 2011

---

1. Überlegen Sie, dass die Taylorformel mit Hilfe des "o-Symbols" folgendermaßen geschrieben werden kann:

$$f(x+h) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + o(h^n),$$

wobei $f \in C^{n+1}(I, \mathbb{R})$ und $x \in I \subseteq \mathbb{R}$ offen.

Benützen Sie diese Formel für $n = 2$, um zu zeigen, dass

$$f(x+h) + f(x-h) - 2f(x) = f''(x)h^2 + o(h^2).$$

2. Eine von Messdaten x_1 und x_2 abhängige Größe y werde mit Hilfe der Formel

$$y = f(x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{x_2}$$

berechnet, wobei die Werte $\overline{x}_1 = 50$ mit einer (maximalen) Messungenauigkeit $\Delta x_1 = \pm 1$ und $\overline{x}_2 = 10$ mit einer (maximalen) Messungenauigkeit $\Delta x_2 = \pm 1$ gemessen wurden.

(a) Berechnen Sie den Näherungswert $\overline{y} = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$.

(b) Bestimmen Sie den maximalen Fehler $\Delta y := \max_{(x_1,x_2)\in I} |f(x_1, x_2) - f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)|$, den man macht, wenn man den wahren Wert durch $f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)$ ersetzt. Hierbei bezeichnet $I = [49; 51] \times [9; 11]$ das 2-dimensionale Unsicherheitsintervall.

(c) Der Fehler Δy ist im allgemeinen schwierig zu berechnen. Daher ersetzt man f durch die linearisierte Funktion $f(x_1, x_2) = f(\overline{x}_1, \overline{x}_2) + \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_i} \cdot (x_i - \overline{x}_i)$ und erhält die linearisierte Fehlerschätzung

$$(\Delta y)_{\text{lin}} := \sum_{i=1}^{2} \left| \frac{\partial f(\overline{x}_1, \overline{x}_2)}{\partial x_i} \right| \cdot |\Delta x_i|.$$

Berechnen Sie die linearisierte Fehlerabschätzung und vergleichen Sie nun den maximalen Fehler Δy mit der linearisierten Fehlerabschätzung.

Bemerkung: Im allgemeinen ist $(\Delta y)_{\text{lin}}$ keine obere Schranke für den auftretenden Fehler. Eine tatsächliche Fehlerabschätzung wird durch die Maximalfehlerabschätzung gegeben (vgl. Aufgabe 3).

3. Stellen Sie den Term $x^2 + axy + by^2$ für $a, b \in \mathbb{R}$ beliebig als Summe zweier Quadrate dar.

Hinweis: Nutzen Sie die Methode der Quadratischen Ergänzung.