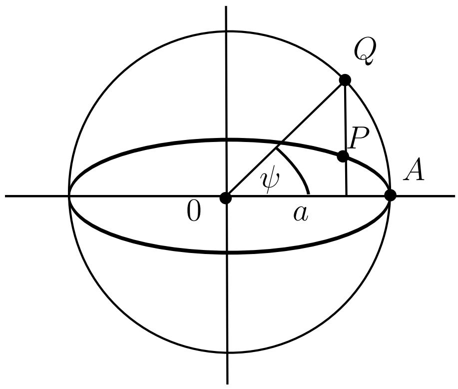
Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 08 27. 06. 2011

1. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^3 + x^2y + xy^2 + y^3 - 6x - 6y$.
   (a) Bestimmen Sie die lokalen Extrema von f.
   (b) Bestimmen Sie das Maximum dieser Funktion auf dem abgeschlossenen Kreis $K(0,4)$ (also auf der kompakten Menge $x^2 + y^2 \leq 16$).

2. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = y^4 - 3xy^2 + x^3$.
   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.
   Hinweis: Betrachten Sie die Kurve $(t,0)$ am Punkt $(0,0)$, um zu zeigen, dass $(0,0)$ keine Extremstelle ist.
   (b) Bestimmen Sie alle globalen Extremwerte von f auf $\{(x,y) : |x| \leq 2\}$.

3. Laut den Keplerschen Gesetzen bewegen sich die Planeten auf elliptischen Bahnen um die Sonne, wobei die Sonne sich in einem der beiden Brennpunkte befindet. Kennt man die Bahn eines Planeten, das heißt die Ebene, in der sie verläuft, die Umlaufzeit T, die Exzentrizität $0 < \epsilon < 1$ der Ellipse und die Länge a der großen Halbachse, so kann man den Aufenthaltsort des Planeten in Abhängigkeit von der Zeit mit Hilfe der Kepler-Gleichung bestimmen:



Sei dazu t die Zeit, $t = 0$ der Zeitpunkt, an dem der Planet die große Halbachse passiert und $\psi = \measuredangle AOQ$ die sogenannte “Exzentrische Anomalie”(vgl. Bild). Dann gilt folgender Zusammenhang (ohne Beweis):

$$\frac{2\pi}{T} t = \psi - \epsilon \sin \psi$$

   (a) Zeigen Sie, dass es genau eine Funktion $\psi(t)$ gibt, die die Gleichung $f(t,\psi) = \frac{2\pi}{T} t - \psi + \epsilon \sin \psi = 0$ löst.
   (b) Bestimmen Sie die Stellen, an denen die Winkelgeschwindigkeit ψ' extremal ist.

4. *(2 Punkte)* Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrix.
   Zeigen Sie: A ist genau dann negativ definit, wenn für die Hauptunterdeterminanten $\det A_k$, $1 \leq k \leq n$, gilt:
   $$(-1)^k \cdot \det(A_k) > 0.$$
   Hinweis: Eine Matrix A ist genau dann negativ definit wenn $-A$ positiv definit ist. Benützen Sie das Hauptunterdeterminantenkriterium für $-A$.

5. *(2 Punkte)* Sei $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ symmetrische Matrix und seien $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n$ ihre Eigenwerte.

   Zeigen Sie, dass für alle $v \in \mathbb{R}^n$ die Abschätzung $\lambda_1 \|v\|^2 \leq v^T A v \leq \lambda_n \|v\|^2$ gilt.

   Bemerkung: Ist A zusätzlich positiv definit, so ist $\lambda_1 > 0$. Daher gilt in diesem Fall für alle $v \in \mathbb{R}^n$: $v^T A v \geq \lambda_1 \|v\|^2$.

Abgabe: Montag, 04. 07. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 08 27. 06. 2011

---

1. Sei $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ symmetrische Matrix.

   Zeigen Sie: A ist genau dann negativ definit, wenn $a_{11} < 0$ und $\det A > 0$.

2. (a) Zeigen Sie, dass die Matrix $A := \begin{pmatrix} 7 & 4 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ positiv definit ist. Zeigen Sie dazu, dass die Hauptunterdeterminanten $\det A_k$, $1 \leq k \leq 3$, positiv sind.

   (b) Berechnen Sie die Hauptunterdeterminanten von $-A$.

3. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = y^2 - 3xy + x^3$.

   (a) Bestimmen Sie alle lokalen Extremstellen von f.

   (b) Bestimmen Sie alle globalen Extremwerte von f auf $\{(x, y) : x \geq -2\}$.