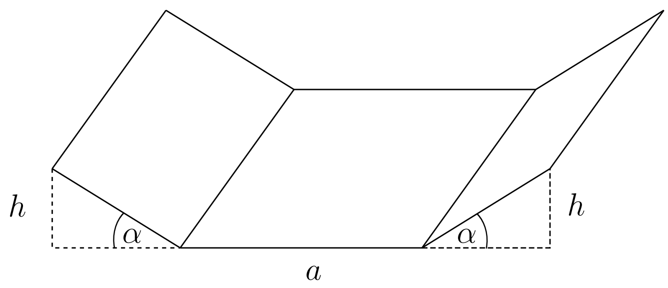
Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 09 04. 07. 2011

1. Betrachten Sie die Abbildungen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$, $f(t) = \begin{pmatrix} e^t \\ \sin t \\ t^2 \end{pmatrix}$, und $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2, x_3) = \begin{pmatrix} x_1 x_2 \\ x_1 + x_3 \end{pmatrix}$.
   (a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen $\mathcal{J}_f(t)$ und $\mathcal{J}_g(x)$ und bilden Sie das Matrixprodukt $\mathcal{J}_g(f(t))\,\mathcal{J}_f(t)$.
   (b) Berechnen Sie die Verkettung $h := g \circ f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ und deren Jacobimatrix.

2. Aus einem rechteckigen Blechstück mit den Seitenlängen A und 1 soll eine Rinne der Länge 1 mit trapezförmigem Querschnitt und maximalem Volumen hergestellt werden (vgl. Skizze).



   Anleitung: Berechnen Sie das Volumen $V = V(a, h, \alpha)$ der Rinne für $0 \leq \alpha \leq \frac{\pi}{2}$ und maximieren Sie es unter der Nebenbedingung, dass $a + 2\frac{h}{\sin\alpha} = A$ gilt.

   Hinweis: Betrachten Sie die Fälle $\alpha = 0$ (trivial!) und $\alpha = \frac{\pi}{2}$ getrennt.

3. *Kugelkoordinaten.* Die Abbildung

$$f : [0, \infty] \times [0, \pi] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \theta, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r\,\cos\varphi\,\sin\theta \\ r\,\sin\varphi\,\sin\theta \\ r\,\cos\theta \end{pmatrix}$$

   transformiert Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.
   (a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{J}_f$.
   (b) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Jacobimatrix gilt: $\det \mathcal{J}_f(r, \varphi, \theta) = r^2 \sin\theta$.
   (c) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Betrachten Sie die Verkettung $G(r, \varphi, \theta) := g \circ f(r, \varphi, \theta)$. Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator Δg folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 G}{(\partial r)^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2\theta}\frac{\partial^2 G}{(\partial\varphi)^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{(\partial\theta)^2} + \frac{\cot\theta}{r^2}\frac{\partial G}{\partial\theta}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von G und gehen dann wie im Fall des Laplaceoperators in Polarkoordinaten (vgl. Vorlesung nach (7.2.18)) vor.

4. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = x_1^2 x_2^2 \ldots x_n^2$.

   (a) Maximieren Sie die Funktion f auf der Sphäre $\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = 1\}$.

   Seien $a_1, a_2, \ldots, a_n$ positive reelle Zahlen. Betrachten Sie $b_i \in \mathbb{R}$, so dass $b_i^2 = \frac{a_i}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$, $1 \leq i \leq n$ gilt.

   (b) Zeigen Sie, dass $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$ auf der Sphäre liegen.

   (b) Folgern Sie aus Aufgabenteil a) und b), dass das arithmetische Mittel höchstens so groß ist wie das geometrische Mittel, d.h.

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n} \leq \frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n}.$$

Abgabe: Montag, 11. 07. vor der Vorlesung

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt

Anwesenheitsaufgaben zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. V. Bangert

Blatt 09 04. 07. 2011

---

1. Betrachten Sie die Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} x_1 \sin x_2 \\ x_1 + \cos x_2 \end{pmatrix}$.

   Bestimmen Sie die Jacobimatrix von f.

2. *Polarkoordinaten.* Die Abbildung

$$f : [0, \infty] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2, \quad (r, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \\ r \sin\varphi \end{pmatrix}$$

   transformiert Polarkoordinaten in kartesische Koordinaten.

   (a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{J}_f$.

   (b) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Jacobimatrix gilt: $\det \mathcal{J}_f(r, \varphi) = r$.

3. Finden Sie einen Quader mit Kantenlängen x, y und z, dessen Volumen $1m^3$ beträgt und dessen Oberfläche möglichst klein ist. Minimieren Sie dazu die Funktion $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = 2xy + 2yz + 2xz$ unter der Nebenbedingung $g(x, y, z) = xyz - 1 = 0$.

   Hinweis: Nutzen Sie die Methode der Lagrange-Multiplikatoren. Zeigen Sie insbesondere, dass die Bedingung $\operatorname{grad} g \neq 0$ auf der Menge $\{(x, y, z) : xyz - 1 = 0\}$ erfüllt ist.