Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 01 23. 04. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Lösen Sie folgende linearen Gleichungssysteme mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmengen an:

(a) $$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 3x_2 &= -1 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 + 3x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 &= 5 \\ -3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 1 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie folgendes lineare Gleichungssystem mit Hilfe des Gauß-Algorithmus und geben Sie die Lösungsmenge an:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 5x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ 2x_1 - 3x_2 + x_3 + 3x_4 &= 5 \end{aligned}$$

3. Es seien $r, s, \varphi, \psi \in \mathbb{R}$ mit $r, s \geq 0$. Betrachten Sie die folgenden Punkte in der Ebene:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \end{pmatrix}, \qquad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} s\cos\psi \\ s\sin\psi \end{pmatrix},$$

siehe dazu auch (2.3.1). Wir schreiben im Folgenden $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x}}$.

Rechnen Sie nach, dass

(a) $\|\mathbf{x}\| = r$,

(b) $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y} = rs\cos(\psi - \varphi)$.

Hinweis: Benutzen Sie (3.3)-(3.7) in Kapitel 2.3.

4. Es seinen $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$. Das <u>Vektorprodukt</u> $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ ist definiert durch

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

Wir schreiben im Folgenden $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$, siehe auch (1.3.5).

(a) Rechnen Sie nach, dass $\mathbf{x}^\top \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = \mathbf{y}^\top \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) = 0$.

(b) Rechnen Sie nach, dass $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2 + (\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y})^2 = \|\mathbf{x}\|^2 \cdot \|\mathbf{y}\|^2$

(c) Folgern Sie, dass $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\| \cdot \sin \sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y})$,
wobei $\sphericalangle(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \arccos \frac{\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \cdot \|\mathbf{y}\|} \in [0, \pi]$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 30. 04. 12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt