Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“
im Sommersemester 2012 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 10 02. 07. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Die Energie, die ein Auto verbraucht, das mit konstanter Geschwindigkeit v eine Stunde lang fährt, hängt von v ab. Benutzen Sie folgenden Ansatz, um den Energieverbrauch in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit zu beschreiben:

$$f(v) = av^3 + bv^2 + cv + d.$$

Es werden Messungen des Energieverbrauchs y bei konstanter Geschwindigkeit v durchgeführt:

v [km/h]	30	50	80	100	130	150
y [l/h]	0,6	1,5	3,2	4,5	9,1	12

(a) Bestimmen Sie die Konstanten a, b, c und d mit der Methode der kleinsten Quadrate. *Hinweis:* Minimieren Sie die Funktion $F(a,b,c,d) = \sum_{i=1}^{6} |y_i - g_i(a,b,c,d)|^2$, wobei $g_i(a,b,c,d) = av_i^3 + bv_i^2 + cv_i + d$, $1 \leq i \leq 6$.

(b) Leiten Sie daraus die Formel für den Verbrauch in Liter pro 100 Kilometer her.

2. Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x,y) = \begin{pmatrix} xy + 2 \\ x^2 - x - 2y - 4 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie die Jacobi-Matrix von f. Für welche Punkte (x, y) ist $J_f(x, y)$ nicht invertierbar?

(b) Wenden Sie das Newtonverfahren an mit Startwerten $(-3, 2)$, $(3/2, -3)$ und $(5/2, 0)$ (jeweils 2 Iterationsschritte).

(c) "Erraten" Sie die Nullstellen von f.

3. *Kugelkoordinaten.* Die Abbildung

$$f : (0,\infty) \times (0,\pi) \times (0, 2\pi) \to \mathbb{R}^3, \quad (r, \psi, \varphi) \mapsto \begin{pmatrix} r \cos\varphi \sin\psi \\ r \sin\varphi \sin\psi \\ r \cos\psi \end{pmatrix}$$

transformiert Kugelkoordinaten in kartesische Koordinaten.

(a) Bestimmen Sie die Jacobimatrix $\mathcal{J}_f$.

(b) Zeigen Sie, dass für die Determinante der Jacobimatrix gilt: $\det \mathcal{J}_f(r, \varphi, \psi) = r^2 \sin\psi$.

(c) Bestimmen Sie die Umkehrabbildung $(x, y, z) \mapsto (r(x, y, z), \varphi(x, y, z), \psi(x, y, z))$.

Bitte wenden!

(d) Sei $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine 2-mal stetig differenzierbare Funktion. Betrachten Sie die Verkettung $G(r, \varphi, \psi) := g \circ f(r, \varphi, \psi)$. Zeigen Sie, dass der Laplaceoperator Δg folgendermaßen dargestellt werden kann:

$$\Delta g = \frac{\partial^2 G}{(\partial r)^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G}{\partial r} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \psi}\frac{\partial^2 G}{(\partial \varphi)^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 G}{(\partial \psi)^2} + \frac{\cot \psi}{r^2}\frac{\partial G}{\partial \psi}$$

Hinweis: Bestimmen Sie die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von G und gehen dann wie im Fall des Laplaceoperators in Polarkoordinaten vor.

4. Betrachten Sie die Funkion $f(x, y, z) = (x, y, z)A(x, y, z)^\top$ mit

$$A := \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie Maximum und Minimum der Funktion f auf der oberen Halbsphäre $\{ (x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1 \text{ und } z \geq 0 \}$ und geben Sie die zugehörigen Extremstellen an.

Hinweis: Benutzen Sie für das Innere der oberen Halbsphäre die Lagrange Multiplikatorregel. Setzen Sie für die Extrema auf dem Rand $z = 0$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 09.07.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt