

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

im Sommersemester 2012 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 11

09. 07. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei $n \in \mathbb{Z}$ eine natürliche Zahl. Das folgende Parameterintegral

$$J_n(x) := \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(x \sin(t) - nt) dt$$

wird Besselfunktion genannt.

Zeigen Sie: Für jedes $n \in \mathbb{Z}$ löst die Besselfunktion $J_n(x)$ die Differentialgleichung

$$x^2 \cdot f'' + x \cdot f' + (x^2 - n^2) \cdot f = 0.$$

Hinweis: Verwenden Sie partielle Integration. Berechnen Sie dazu zunächst

$$\frac{d}{dt} \sin(x \sin t - nt).$$

2. Betrachten Sie die Funktion

$$f : [0, 1]^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{x^2} & , \text{ falls } 0 < y < x, \\ -\frac{1}{y^2} & , \text{ falls } 0 < x < y, \\ 0 & , \text{ falls } x = y \text{ oder } xy = 0, \end{cases}$$

Berechnen Sie

$$\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy \quad \text{und} \quad \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx.$$

3. Berechnen Sie jeweils die Divergenz und die Rotation der folgenden Vektorfelder:

$$V : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad V(x, y, z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ x \end{pmatrix}, \quad W : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad W(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ z \\ y \end{pmatrix}.$$

4. Sei $r > 0$ und $z \in \mathbb{R}$. Betrachten Sie die Kurve $c : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $c(\varphi) = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \\ z \end{pmatrix}$.

Berechnen Sie das Kurvenintegral der Vektorfelder V und W aus Aufgabe 3 längs der Kurve c .

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 16.07.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt