Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2012 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 12 — 16. 07. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = \dfrac{1}{x^2+y^2}\begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$.

   (a) Besitzt das Vektorfeld V ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie das Potential gegebenenfalls an.

   (b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von V längs der Kurven $\gamma_\pm$, wobei $\gamma_\pm : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma_\pm(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \pm \sin t \end{pmatrix}$ gegeben ist.

2. Betrachten Sie das Vektorfeld $V : \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $V(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}$.

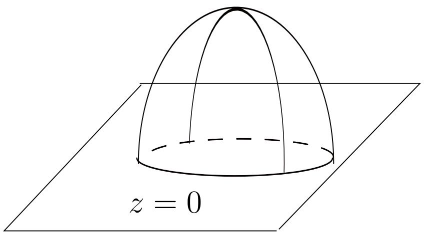
   (a) Besitzt das Vektorfeld V ein Potential? Begründen Sie Ihre Antwort und geben Sie das Potential gegebenenfalls an.

   Hinweis: Integrieren Sie längs des Einheitskreises und der radialen Achse.

   (b) Berechnen Sie die Kurvenintegrale von V längs der Kurven $\gamma_\pm$, wobei $\gamma_\pm : [0,\pi] \to \mathbb{R}^2$ durch $\gamma_\pm(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \pm \sin t \end{pmatrix}$ gegeben ist.

3. Berechnen Sie den Schwerpunkt des Halbkreises $\mathbf{A} = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \le 1,\ x \ge 0\,\}$.

4. Berechnen Sie das Volumen des abgeschnittenen Paraboloiden (vgl. Skizze)



$$\mathbf{P} = \{(x,y,z) \mid 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}.$$

5. *(4 Zusatzpunkte)* Sei $B \subseteq \mathbb{R}^2$ eine kompakte Menge, deren Rand ∂B durch die Kurve $\mathbf{w} : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ parametrisiert wird, und $\mathbf{v} : B \to \mathbb{R}^2$ ein Vektorfeld auf B.

   Leiten Sie aus dem Satz von Green den folgenden “Divergenzsatz” her:

$$\oint_{\mathbf{w}} \mathbf{v}\ \mathrm{d}\mathbf{n} = \int_B \operatorname{div} \mathbf{v}\ \mathrm{d}F.$$

   Hinweis: Betrachten Sie das Vektorfeld $\overline{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} v_2 \\ -v_1 \end{pmatrix}$ für $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 23.07.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt