

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 02

30. 04. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Welche der folgenden Matrizen können miteinander multipliziert werden? Berechnen Sie jeweils das Produkt.

$$\begin{pmatrix} 2 & 8 & -1 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -3 & 2 \\ -1 & -1 & 3 & -2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 5 & 0 & 1 \\ 2 & -4 & 1 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

2. Invertieren Sie folgende Matrix mit Hilfe des Gaußverfahrens

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -4 & 1 \end{pmatrix}$$

und machen Sie die Probe.

3. Für zwei Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ definieren wir

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = x_1 y_2 - x_2 y_1.$$

Seien wieder

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} r \cos \varphi \\ r \sin \varphi \end{pmatrix}, \quad \mathbf{y} = \begin{pmatrix} s \cos \psi \\ s \sin \psi \end{pmatrix} \quad \text{mit } \varphi, \psi \in \mathbb{R} \text{ und } r, s \geq 0.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = rs \sin(\psi - \varphi)$.
(b) Folgern Sie: $|\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})|$ ist der Flächeninhalt des von \mathbf{x} , \mathbf{y} aufgespannten Parallelogramms (Grundseite mal Höhe).
(c) Was bedeutet das Vorzeichen von $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y})$?

4. Für drei Vektoren $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ definieren wir

$$\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = x_1 y_2 z_3 + x_2 y_3 z_1 + x_3 y_1 z_2 - x_1 y_3 z_2 - x_2 y_1 z_3 - x_3 y_2 z_1.$$

- (a) Zeigen Sie, dass $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = \mathbf{x}^\top \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = \mathbf{y}^\top \cdot (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) = \mathbf{z}^\top \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})$.
(b) Folgern Sie aus Aufgabe 4 von Blatt 1, dass $|\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})|$ das Volumen des von \mathbf{x} , \mathbf{y} und \mathbf{z} aufgespannten Spats beschreibt (Grundfläche mal Höhe).
(c) (1 Zusatzpunkt) Was bedeutet das Vorzeichen von $\det(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$?

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 07. 05. 12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt