Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 04 14. 05. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Betrachten Sie die Abbildung $f_{\mathbf{y}} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit

$$f_{\mathbf{y}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \times \mathbf{y},$$

   wobei das Vektorprodukt $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ wie in Aufgabe 4 von Blatt 1 definiert ist.

   (a) Zeigen Sie, dass $f_{\mathbf{y}}$ eine lineare Abbildung ist.

   (b) Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $\mathbf{M}_S^S(f_{\mathbf{y}})$ von $f_{\mathbf{y}}$ bezüglich der Standardbasis $\mathbf{S} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

   (c) Bestimmen Sie den Rang der Matrix $\mathbf{M}_S^S(f_{\mathbf{y}})$.

2. Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2$. Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt des Dreiecks mit den Ecken $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ und $\mathbf{z}$ durch folgende Formel berechnet werden kann:

$$\frac{1}{2}\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{pmatrix}\right|.$$

   Hinweis: Was wird durch die Formel $\left|\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & y_1 - x_1 & z_1 - x_1 \\ x_2 & y_2 - x_2 & z_2 - x_2 \end{pmatrix}\right|$ berechnet?

3. *Zur Erinnerung:* Zwei Vektoren $\mathbf{x}$, $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ stehen senkrecht aufeinander, wenn $\mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y} = 0$.

   (a) Sei $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ gegeben. Zeigen Sie, dass

$$U_{\mathbf{y}} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \mathbf{x}^\top \cdot \mathbf{y} = 0\} \subseteq \mathbb{R}^3$$

   ein Untervektorraum ist.

   (b) Sei $\mathbf{y} = (1, 2, 3)^\top$. Bestimmen Sie eine Basis des Raums $U_{(1,2,3)^\top}$ aus Teil (a).

4. Es sei $P_d(\mathbb{R})$ der Vektorraum der reellen Polynome vom Grad $\leq d$.

   (a) Zeigen Sie: Die Polynome

$$p_i(x) = \frac{x-0}{i-0} \cdot \ldots \cdot \frac{x-(i-1)}{i-(i-1)} \cdot \frac{x-(i+1)}{i-(i+1)} \cdot \ldots \cdot \frac{x-d}{i-d}, \qquad i \in \{0, 1, \ldots, d\}$$

   vom Grad $\leq d$ erfüllen die Gleichungen

$$p_i(j) = \begin{cases} 1 & j = i \\ 0 & j \in \{0, 1 \ldots, d\} \setminus \{i\} \end{cases} \quad \text{für alle } i \in \{0, 1, \ldots, d\}.$$

Bitte wenden!

(b) Folgern Sie aus (a), dass die Polynome $p_0, p_1, \ldots, p_d$ lineaer unabhängig sind und somit insbesondere durch $\mathbf{B} = (p_0, p_1, \ldots, p_d)$ eine Basis von $P_d(\mathbb{R})$ gegeben ist.

Hinweis: Benutzen Sie, dass $\dim(P_d(\mathbb{R})) = d + 1$.

(c) Zeigen Sie: Die Koordinatenabbildung $k_B : P_d(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^{d+1}$ hat die Gestalt

$$k_B(p) = \big(p(0), p(1), \ldots, p(d)\big)^\top \qquad \text{für alle } p \in P_d(\mathbb{R}).$$

(d) Bestimmen Sie die Basiswechselmatrix $\mathbf{M}_B^C$ für die Basen $\mathbf{B}$ und $\mathbf{C} = (1, x, x^2, \ldots, x^d)$ von $P_d(\mathbb{R})$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 21. 05. 12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt