

Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“

im Sommersemester 2011 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 06

04. 06. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Zeigen Sie:

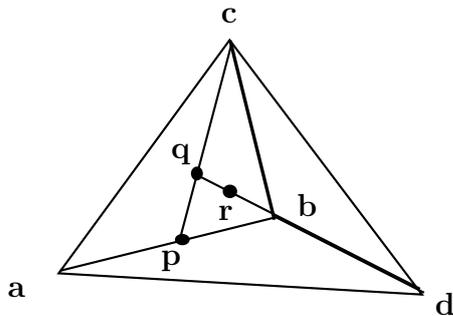
(a) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = 2(\|\mathbf{x}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2)$.

(b) Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt: $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \frac{1}{2}(\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\|^2 - \|\mathbf{x}\|^2 - \|\mathbf{y}\|^2)$.

2. Zeigen Sie: Für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ gilt:

$$\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \geq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \geq \left| \|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \right|.$$

3. Seien $\mathbf{a} = (1, 1, 1)^\top$, $\mathbf{b} = (1, -1, -1)^\top$, $\mathbf{c} = (-1, 1, -1)^\top$ und $\mathbf{d} = (-1, -1, 1)^\top$ die Eckpunkte eines regelmäßigen Tetraeders (vgl. Skizze).



(a) Sei $\mathbf{p} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} + \mathbf{b})$ der Schwerpunkt der Strecke von \mathbf{a} nach \mathbf{b} . Bestimmen Sie den Winkel $\angle(\mathbf{c} - \mathbf{p}, \mathbf{d} - \mathbf{p})$.

(b) Sei $\mathbf{q} = \frac{1}{3}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c})$ der Schwerpunkt des Dreiecks mit den Ecken \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} . Bestimmen Sie die Winkel $\angle(\mathbf{a} - \mathbf{q}, \mathbf{b} - \mathbf{q})$ und $\angle(\mathbf{q} - \mathbf{a}, \mathbf{d} - \mathbf{a})$.

(c) Sei $\mathbf{r} = \frac{1}{4}(\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} + \mathbf{d})$ der Schwerpunkt des Tetraeders mit den Ecken \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} . Bestimmen Sie den Winkel $\angle(\mathbf{a} - \mathbf{r}, \mathbf{b} - \mathbf{r})$.

4. Betrachten Sie die Matrix $\mathbf{A} = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 8 & 1 & -4 \\ 4 & -4 & 7 \\ -1 & -8 & -4 \end{pmatrix}$.

(a) Zeigen Sie, dass \mathbf{A} eine orthogonale Matrix ist.

(b) Zeigen Sie, dass die Determinante von \mathbf{A} positiv ist.

(c) Bestimmen Sie die komplexen Eigenwerte und zugehörigen Eigenvektoren von \mathbf{A} .

(d) (1,5 Zusatzpunkte) Zeigen Sie: \mathbf{A} ist eine Drehmatrix mit Drehachse $(5, 1, -1)^\top$ und der Drehwinkel φ erfüllt die Gleichung $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 11.06.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt