Übungen zur Vorlesung „Mathematik II für Studierende des Ingenieurwesens“ im Sommersemester 2012 bei Prof. Dr. S. Goette

Blatt 08 18. 06. 2012

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und Ihre Übungsgruppe auf Ihr Blatt.

1. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x \cdot y}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (a) Zeigen Sie: Die partiellen Funktionen $x \mapsto f(x,b)$ und $y \mapsto f(a,y)$ sind für alle $a, b \in \mathbb{R}$ stetig.

   (b) Zeigen Sie: Die Funktion f ist partiell differenzierbar.

   (c) Sei $\varepsilon > 0$ klein. Berechnen Sie $f(\varepsilon,\varepsilon)$ und $f(\varepsilon,-\varepsilon)$.

   (d) Zeigen Sie: Die Funktion f ist an der Stelle $(0,0)$ nicht stetig.

2. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^2 \cdot y}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ an allen Punkten (x,y).

   (b) Zeigen Sie: Die Funktion f ist nicht total differenzierbar am Punkt $(0,0)$.

   (c) *(1 Zusatzpunkt):* Zeigen Sie: Die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ und $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sind am Punkt $(0,0)$ nicht stetig.

3. Betrachten Sie die Funktion

$$f(x,y) := \begin{cases} \dfrac{x^3 \cdot y}{x^2+y^2} & \text{, falls } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, falls } (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

   (a) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ für alle Punkte (x,y) mit $y = 0$ und bestimmen Sie $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}$ an der Stelle $(0,0)$.

   (b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ für alle Punkte (x,y) mit $x = 0$ und bestimmen Sie $\dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}$ an der Stelle $(0,0)$.

bitte wenden!

(c) Sei $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \dfrac{x^6 + 6x^4y^2 - 3x^2y^4}{(x^2+y^2)^3}$.

Zeigen Sie: Auf $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ gilt: $\dfrac{\partial}{\partial x}\dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) = g(x,y)$.

(d) *(1 Zusatzpunkt):* Zeigen Sie: Die Funktion g hat keinen Grenzwert an der Stelle $(0,0)$.

4. Sei $D \subseteq \mathbb{R}^n$ offen, $V : D \to \mathbb{R}$ eine C^1-Funktion und $\mathbf{x} : [a,b] \to D$ eine C^1-Kurve. Definiere $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ durch $f(t) = V(\mathbf{x}(t))$.

(a) Zeigen Sie: $f'(t) = \operatorname{grad} V(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)$.

(b) Zeigen Sie: $V(\mathbf{x}(b)) - V(\mathbf{x}(a)) = \int_a^b \operatorname{grad} V(\mathbf{x}(t)) \cdot \dot{\mathbf{x}}(t)\, dt$.

Hinweis: Wenden Sie den Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung auf die Funktion f an.

Abgabe: Bitte werfen Sie Ihre Lösung am Montag, 25.06.12, bis 14.15h in den dafür vorgesehenen Briefkasten im Untergeschoss der Eckerstr. 1.

Bitte schreiben Sie Ihren Namen und die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf Ihr Blatt